



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2018)

Cuarta Fase - Nivel 3

11 de noviembre de 2018

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
 - En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
 - No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
 - Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
 - Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
 - Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.
-

1. Encuentre un número de cuatro dígitos \overline{PERU} que cumpla la propiedad

$$\overline{PERU} = (P + E + R + U)^U.$$

Además, demuestre que hay exactamente un número de cuatro dígitos que cumple esa propiedad.

2. Sean a , b y c números reales tales que

$$a + \frac{b}{c} = b + \frac{c}{a} = c + \frac{a}{b} = 1.$$

- a) Pruebe que $ab + bc + ca = 0$ y $a + b + c = 3$.
b) Pruebe que $|a| + |b| + |c| < 5$.



Cuarta Fase - Nivel 3

3. Sea ABC un triángulo acutángulo tal que $BA = BC$. En los lados BA y BC se escogen los puntos D y E , respectivamente, tales que DE y AC son paralelos. Sea H el ortocentro del triángulo DBE y M el punto medio de AE . Si $\angle HMC = 90^\circ$, determine la medida del ángulo $\angle ABC$.

Aclaración: El ortocentro de un triángulo es el punto de intersección de sus alturas.

4. Un tablero de 100×200 tiene k casillas pintadas de negro. Una *operación* consiste en escoger un subtablero de 2×3 o de 3×2 que tenga exactamente 5 casillas negras y pintar de negro la casilla que falta. Determine el menor valor de k para el cual existe una distribución inicial de las k casillas negras tal que luego de algunas operaciones se pueda conseguir que todas las casillas del tablero sean negras.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN