



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XV OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2018)

Cuarta Fase - Nivel 2

11 de noviembre de 2018

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.

1. Sea ABC un triángulo y sean D , E y F puntos de los lados BC , CA y AB , respectivamente, tales que DE es perpendicular a AC y $\angle BAC = 2\angle BFD$. Si $AE = EC + BD$ y $CD = DB + AF$, pruebe que el triángulo ABC es equilátero.

2. Se tiene un tablero de 5×5 que al inicio tiene escrito el número 0 en cada casilla. Hay dos operaciones disponibles:

- Escoger dos casillas que están en la misma fila y sumar 1 a los números de esas casillas.
- Escoger dos casillas que están en la misma columna y sumar 2 a los números de esas casillas.

Determine cuántas operaciones como mínimo son necesarias para conseguir que todos los números del tablero sean iguales y positivos.



PERÚ

Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

Cuarta Fase - Nivel 2

3. Sean a y b números reales que pertenecen al intervalo cerrado $[2, 3]$. Determine el mayor valor posible de la expresión

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a},$$

y encuentre todas las parejas (a, b) para las cuales se consigue ese mayor valor.

4. Determine el menor número entero $k \geq 3$ que tiene la siguiente propiedad: Si a, b, c, d, n son cualesquiera enteros positivos tales que $a + b + c + d$ y $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ son múltiplos de n , entonces $a^k + b^k + c^k + d^k$ también es múltiplo de n .

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN