Capítulo 8
Cuarta Fase

8.1. Nivel 1

1. Se tiene los siguientes tableros de 4×4:

1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3
1	2	3	1

Tablero 1

2	2	1	3
2	1	1	3
1	1	1	2
3	3	2	2

Tablero 2

Mateo debe eliminar algunos números de cada tablero de tal modo que la suma de los números que queden en cada fila y en cada columna sea múltiplo de 3.

a) Mostrar cómo Mateo puede eliminar 5 números del Tablero 1.

b) ¿Cuántos números como mínimo Mateo debe eliminar del Tablero 2?

Aclaración: Si una fila o una columna no tiene números, su suma es 0 y 0 es múltiplo de 3.

Solución

a) Una forma de eliminar 5 números es la siguiente:

1	2	3	•
2	3	1	•
3	1	2	3
•	•	3	•

Tablero 1

Notamos que la suma de los números que quedan en cada fila y en cada columna es 3, 6 o 9.

b) Veamos el Tablero 2. Como en cada una de las tres primeras filas la suma no es múltiplo de 3, Mateo debe eliminar al menos un número de cada fila. En la cuarta fila los números son 3, 3, 2, 2 y la suma es 10 (no es múltiplo de 3), si Mateo elimina un 2 o un 3 no consigue que la suma de los números que queden sea múltiplo de 3, entonces Mateo debe eliminar al menos dos números de la cuarta fila. Por lo tanto, Mateo debe eliminar al menos $1+1+1+2 = 5$ números en total. A continuación mostramos un ejemplo eliminando 5 números:

•	2	1	3
2	•	1	3
1	1	1	•
3	3	•	•

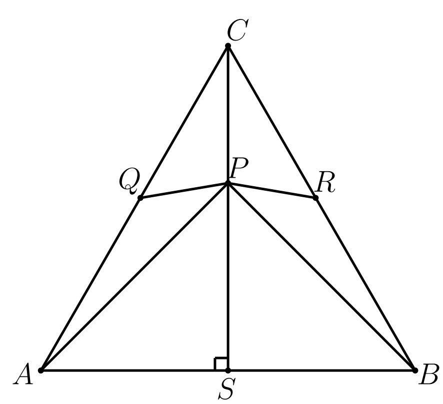
Tablero 2

En este ejemplo la suma de los números que quedan en cada fila y en cada columna es 3 o 6.

2. Ada dibujó un triángulo, escogió un punto de cada lado y escogió un punto P en el interior del triángulo. Luego, trazó segmentos que unen P con los otros seis puntos (los tres vértices y los tres puntos que están en los lados). De esta forma el triángulo inicial quedó dividido en seis triángulos isósceles. Muestre, mediante un ejemplo, cómo Ada pudo haber conseguido esto.

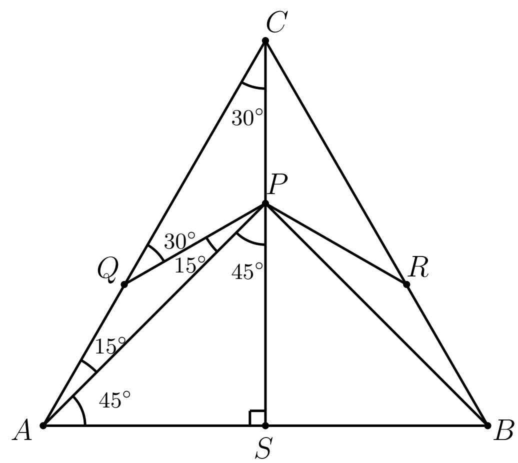
Solución

En esta solución daremos dos ejemplos. Comenzamos con un triángulo isósceles ABC tal que $CA = CB$ y ubicamos el punto P en la mediatriz de AB (S es el punto medio de AB), luego ubicamos los puntos Q y R de forma simétrica con respecto a la mediatriz.

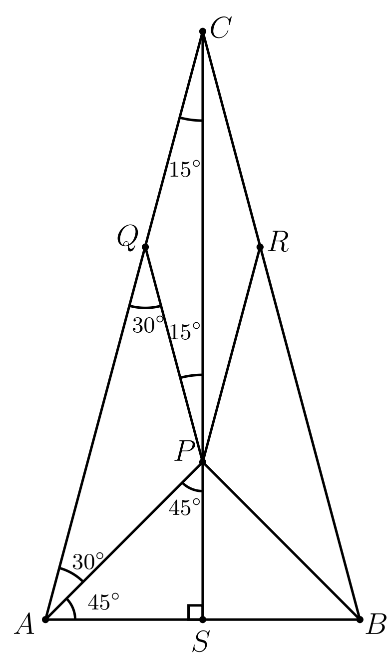


Por la simetría de la figura, es suficiente que los tres triángulos AQP, QCP y APS sean isósceles. Notamos que $\angle PAS = \angle APS = 45°$ y en cambio hay varias formas de conseguir que los otros dos triángulos sean isósceles.

- Primer ejemplo. Buscaremos que se cumplan las condiciones $QA = QP$ y $QP = PC$, para esto sea $\angle QAP = \angle QPA = \alpha$, entonces $\angle PQC = 2\alpha$ y $\angle PCQ = 2\alpha$, con lo cual $45^\circ = \angle APS = 3\alpha$, es decir, $\alpha = 15^\circ$. Notemos que $\angle ACB = 4\alpha = 60^\circ$. Luego, realizamos la construcción de la siguiente manera: consideramos el triángulo equilátero ACB y en la mediatriz de AB ubicamos un punto P tal que $\angle APS = 45^\circ$, luego ubicamos un punto Q en AC tal que $\angle APQ = 15^\circ$ y finalmente ubicamos R el punto simétrico de Q con respecto a la mediatriz.



- Segundo ejemplo. Si buscamos que se cumplan las condiciones $PA = PQ$ y $QP = QC$, de forma similar a como hicimos en el ejemplo anterior podemos obtener:



Observación. No es necesario que el triángulo ABC sea isósceles, es decir, hay ejemplos en los que esta condición no se cumple.

3. Un número primo es *permutable* si al colocar sus dígitos en cualquier orden se obtiene siempre un número primo. Por ejemplo, 113 es un primo permutable porque 113, 131 y 311 son números primos. Pruebe que no existe un número primo permutable de más de cuatro dígitos, que contenga a los dígitos 1,1,3,3.

Solución 1

Usaremos la notación $a \equiv r\,(7)$ para indicar que a es igual a un múltiplo de 7 más r. Por ejemplo, $15 \equiv 1\,(7)$ y $21 \equiv 0\,(7)$. Además, si A es un número de k dígitos y B es número de ℓ dígitos, denotaremos con $\overline{AB}$ al número de $k+\ell$ dígitos que se obtiene al juntar A y B. Por ejemplo, si $A = 723$ y $B = 70$ entonces $\overline{AB} = 72370$.

Supongamos que tal número primo permutable existe. Comencemos notando que

$$\begin{aligned} 1133 &\equiv 6\,(7), \\ 1313 &\equiv 4\,(7), \\ 1331 &\equiv 1\,(7), \\ 3113 &\equiv 5\,(7), \\ 3131 &\equiv 2\,(7), \\ 3311 &\equiv 0\,(7). \end{aligned}$$

Sea A cualquier número formado por los otros dígitos, entonces ninguno de los siguientes números es múltiplo de 7 (porque todos son primos):

$$\begin{aligned} \overline{A1133} &= A \cdot 10^4 + 1133, \\ \overline{A1313} &= A \cdot 10^4 + 1313, \\ \overline{A1331} &= A \cdot 10^4 + 1331, \\ \overline{A3113} &= A \cdot 10^4 + 3113, \\ \overline{A3131} &= A \cdot 10^4 + 3131, \\ \overline{A3311} &= A \cdot 10^4 + 3311. \end{aligned}$$

Viendo los restos de $1133, \ldots, 3311$ en módulo 7, concluimos que $A \cdot 10^4 \equiv 4\,(7)$ de donde obtenemos que $A \equiv 1\,(7)$. Como A fue escogido de forma arbitraria, concluimos que en cualquier orden en que se ubiquen los dígitos de A obtenemos un múltiplo de 7 más 1.

Por otro lado, es fácil notar que un primo permutable solo puede usar los dígitos 1, 3, 7, 9 (porque el dígito de las unidades de un número primo de más de 1 dígito no puede ser 0, 2, 4, 6, 8 o 5).

Vamos a demostrar que todos los dígitos de A son iguales. En efecto, supongamos que A tiene dos dígitos distintos a y b, sea A' un número formado por los otros dígitos, entonces por lo que demostramos anteriormente, los números $\overline{A'ab}$ y $\overline{A'ba}$ son múltiplos de 7 más 1, restando obtenemos

$$\overline{ab} - \overline{ba} \equiv 0\,(7) \quad \Longrightarrow \quad 9(a-b) \equiv 0\,(7) \quad \Longrightarrow \quad (a-b) \equiv 0\,(7),$$

como a y b pertenecen al conjunto $\{1,3,7,9\}$ obtenemos una contradicción porque no hay dos elementos en ese conjunto cuya resta sea múltiplo de 7.

Si A tuviera un número par de dígitos el número $\overline{A1133}$ sería múltiplo de 11 (porque todos los dígitos de A son iguales). Como esto no es cierto, concluimos que A tiene un número impar de dígitos. Digamos que A tiene r dígitos, donde r es impar. No es difícil comprobar que 10^r es múltiplo de 7 más 3, más 6 o más 5.

- Si $10^r \equiv 3\,(7)$ consideramos $\overline{3131A} = 3131 \cdot 10^r + A \equiv 2 \cdot 3 + 1\,(7)$, es decir, $\overline{3131A}$ es múltiplo de 7.
- Si $10^r \equiv 6\,(7)$ consideramos $\overline{1331A} = 1331 \cdot 10^r + A \equiv 1 \cdot 6 + 1\,(7)$, es decir, $\overline{1331A}$ es múltiplo de 7.
- Si $10^r \equiv 5\,(7)$ consideramos $\overline{1313A} = 1313 \cdot 10^r + A \equiv 4 \cdot 5 + 1\,(7)$, es decir, $\overline{1313A}$ es múltiplo de 7.

En cualquier caso hemos conseguido una forma de ordenar los dígitos del número inicial para obtener un número que no es primo. Por lo tanto, no existe un número primo permutable que incluya a los dígitos 1, 1, 3, 3.

Solución 2

Esta solución tiene una idea mucho más simple, lo trabajoso es encontrar las 28 permutaciones adecuadas.

Supongamos que exista un número primo permutable que contenga a los dígitos 1, 1, 3, 3. Sea d cualquier otro dígito y N un número formado por los otros dígitos, es decir, los dígitos del número primo permutable son 1, 1, 3, 3, d junto con los dígitos de N. Como mencionamos en la solución anterior, no es difícil demostrar que $d \in \{1,3,7,9\}$. Así que consideramos cuatro casos:

- Caso 1: $d = 1$. Consideramos las 7 permutaciones de 1,1,3,3,1 que dejan distintos restos al dividir por 7

$$\begin{aligned} 31311 &\equiv 0\,(7), \\ 11313 &\equiv 1\,(7), \\ 13113 &\equiv 2\,(7), \\ 11133 &\equiv 3\,(7), \\ 13311 &\equiv 4\,(7), \\ 11331 &\equiv 5\,(7), \\ 13131 &\equiv 6\,(7). \end{aligned}$$

Por lo tanto, alguno de los números $\overline{N31311}$, $\overline{N11313}$, $\overline{N13113}$, $\overline{N11133}$, $\overline{N13311}$, $\overline{N11331}$, $\overline{N13131}$ es múltiplo de 7, para saber cuál escogemos basta determinar el resto de dividir $N \cdot 10^5$ entre 7.

En los otros casos el proceso es similar, solo necesitamos encontrar las permutaciones que cubran los 7 restos posibles al dividir por 7.

- Caso 2: $d = 3$.

$$\begin{aligned} 11333 &\equiv 0\,(7), \\ 13133 &\equiv 1\,(7), \\ 31313 &\equiv 2\,(7), \\ 13331 &\equiv 3\,(7), \\ 31133 &\equiv 4\,(7), \\ 33311 &\equiv 5\,(7), \\ 13313 &\equiv 6\,(7). \end{aligned}$$

- Caso 3: $d = 7$.

$$\begin{aligned} 13713 &\equiv 0\,(7), \\ 11733 &\equiv 1\,(7), \\ 17313 &\equiv 2\,(7), \\ 13317 &\equiv 3\,(7), \\ 11337 &\equiv 4\,(7), \\ 11373 &\equiv 5\,(7), \\ 13173 &\equiv 6\,(7). \end{aligned}$$

- Caso 4: $d = 9$.

$$\begin{aligned} 13139 &\equiv 0\,(7), \\ 13931 &\equiv 1\,(7), \\ 19133 &\equiv 2\,(7), \\ 31139 &\equiv 3\,(7), \\ 11393 &\equiv 4\,(7), \\ 11933 &\equiv 5\,(7), \\ 11339 &\equiv 6\,(7). \end{aligned}$$

Como siempre conseguimos una permutación de los dígitos que es múltiplo de 7, no existe un primo permutable con las condiciones dadas.

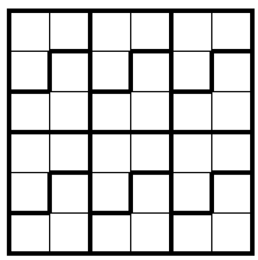
4. A, B y C juegan por turnos sobre un tablero de 6×6. Empieza A, luego B, a continuación C, de nuevo A, y así sucesivamente. Inicialmente todas las casillas son blancas. A comienza pintando una casilla de negro, luego cada jugador en su turno pinta de negro una casilla blanca vecina a la última casilla pintada, donde dos casillas son vecinas si tienen un lado o vértice en común. El juego termina cuando alguno de los jugadores no puede realizar su jugada y gana el jugador que pinta la última casilla.

   a) Pruebe que B y C pueden ponerse de acuerdo para que C gane.

   b) Pruebe que A y B pueden ponerse de acuerdo para que B gane.

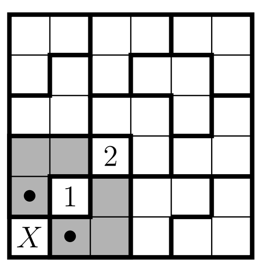
Solución

a) Dividimos el tablero en 12 triminós de la siguiente manera:



Notemos que cualesquiera dos casillas de un mismo triminó son vecinas. La estrategia de B y C es la siguiente: cada vez que A pinte una casilla de un triminó, B y C pintan las otras dos casillas de ese triminó. De esta forma, después de cada jugada de C habrá triminós completos pintados de negro y si A puede jugar, tendría que pintar una casilla de un nuevo triminó. Por lo tanto, si A puede jugar, también lo podrán hacer B y C. Como el número de triminós es finito, en algún momento A ya no podrá jugar y ganará C.

b) Dividimos el tablero en 11 triminós y 3 casillas unitarias de la siguiente manera:



La estrategia de A y B es la siguiente: A pinta la casilla 1 en su primera jugada, luego B pinta la casilla 2, después, cada vez que C pinta una casilla de un triminó, A y B completan ese triminó. Como parte de su estrategia, A y B se asegurarán que nadie pinte la casilla X.

Detallemos la estrategia. Es claro que en su primera jugada C no puede pintar la casilla X. Si C pinta una casilla de un triminó no sombreado, A y B completan ese triminó. Si C pinta una casilla de uno de los triminós sombreados, A y B completan ese triminó de tal forma que B no pinte ninguna de las casillas marcadas con $\bullet$ (como A y B tiene juntos dos jugadas disponibles esto siempre se puede hacer), luego, C nunca podrá pintar la casilla X, y si siguen su estrategia A y B tampoco lo harán. De esta forma, después de las primeras jugadas de A y B, si C puede pintar una casilla tiene que ser una casilla de un triminó y luego, A y B completan el triminó. Como el número de triminós es finito, en algún momento C ya no podrá jugar y ganará B.