6.2. Nivel 2

1. En los exámenes del primer bimestre Paola obtuvo 13 como nota promedio de los cursos de Historia, Inglés, Comunicación y Matemática. En el segundo bimestre ella aumentó 1 punto en Historia, 2 puntos en Inglés, 2 puntos en Comunicación y 3 puntos en Matemática, con respecto al bimestre anterior. ¿Cuál fue la nota promedio de Paola de estos cuatro cursos en el segundo bimestre?

Solución
En el primer bimestre la suma de las 4 notas de Paola fue $13 \times 4 = 52$. En el segundo bimestre, la suma de las 4 notas de Paola aumentó en $1 + 2 + 2 + 3 = 8$, luego, esta suma es $52 + 8 = 60$. Por lo tanto, el promedio de las cuatro notas de Paola en el segundo bimestre fue $60 \div 4 = 15$.

Respuesta: 15

2. Un fabricante de perfume decidió reducir en 10 ml la cantidad de perfume de cada frasco. Al hacer esto, resulta que el contenido de 25 frascos equivale al contenido de 20 frascos antes de la reducción. ¿Cuántos ml de perfume contenía cada frasco al inicio?

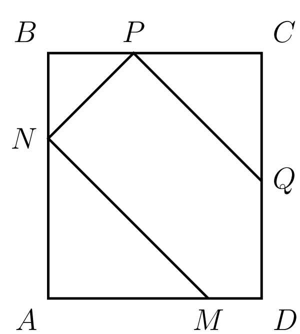
Solución
Sea n la cantidad de ml que contenía cada frasco al inicio, entonces luego de la reducción, cada frasco contiene $(n - 10)$ ml. Actualmente, el contenido de 25 frascos es $25(n-10)$ y el contenido de 20 frascos antes de la reducción es $20n$, por lo tanto:

$$25(n - 10) = 20n,$$

de donde $5n = 250$ y en consecuencia $n = 50$, que es lo que nos pide el problema.

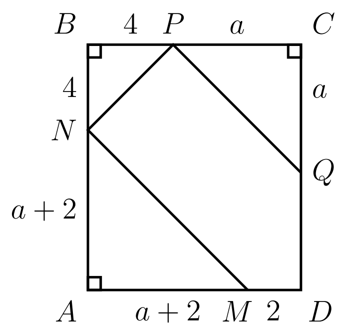
Respuesta: 50

3. Sean M, N, P, Q puntos de los lados DA, AB, BC, CD de un rectángulo $ABCD$, respectivamente, tales que MN, NP, PQ forman ángulos de 45° con los lados del rectángulo. Si $MD = 2$ y $BN = 4$, determine la longitud del segmento QD.



Solución

Según la condición del enunciado, los triángulos PCQ, NBP y NAM son isósceles. Sea $CP = CQ = a$, como $BP = BN = 4$, entonces $BC = a + 4$. Por otro lado, sabemos que $BC = AD$ y $MD = 2$, entonces $AM = a + 2$. Con esto, $AN = AM = a + 2$.



Ahora notamos que $AB = a + 6$ y $CQ = a$. Como $AB = CD$, concluimos que $QD = 6$.

Respuesta: 6

4. ¿Cuál es el menor número entero positivo, múltiplo de 3, tal que el producto de sus dígitos es 2016 ?

Solución

Comencemos notando que la descomposición canónica de 2016 es $2^5 \times 3^2 \times 7$. Por otro lado, el producto de los dígitos de un número de 3 dígitos es como máximo $9 \times 9 \times 9 = 729$. Por lo tanto, el número que buscamos tiene al menos 4 dígitos.

Supongamos que el número que buscamos tiene 4 dígitos. Sea d el primer dígito (de la izquierda), necesitamos que d sea lo menor posible. El producto de los otros tres dígitos es $\frac{2016}{d}$, como el producto de tres dígitos es como máximo 729, concluimos que $\frac{2016}{d} \leq 729$, de donde $d \geq 3$.

Si $d = 3$, el producto de los otros tres dígitos sería $2^5 \times 3 \times 7$. Como el producto es múltiplo de 7, algún dígito debe ser múltiplo de 7 y en consecuencia algún dígito es 7, luego, el producto de los otros dos dígitos sería $2^5 \times 3 = 96$ y esto no es posible.

Si $d = 4$, el producto de los otros tres dígitos sería $2^3 \times 3^2 \times 7$. De forma similar al caso anterior, algún dígito debe ser 7. Luego, el producto de los otros dos dígitos sería $2^3 \times 3^2 = 72$ y esto solo es posible si los dígitos son 8 y 9. Luego, los dígitos del número serían 4, 7, 8 y 9, pero sin importar el orden en que éstos se escriban su suma será 28 que no es múltiplo de 3. Por lo tanto, no podemos obtener un múltiplo de 3 en este caso.

Como es claro que $d = 5$ no es posible, pasamos al caso $d = 6$. Luego, como sabemos que un dígito tiene que ser 7, el producto de los otros dos sería 48 y esto solo es posible si los dígitos son 6 y 8. Como $6 + 7 + 6 + 8 = 27$ sí es múltiplo de 3, de cualquier forma en que se ordenen los dígitos obtenemos un múltiplo de 3, luego, el menor sería 6678.

Respuesta: 6678

5. Los asientos de un auditorio están distribuidos en m filas y n columnas. Durante un seminario se observó que en cada fila había dos asientos vacíos y en cada columna había un asiento vacío. Halle el número total de asientos del auditorio si se sabe que este número es mayor que 350 y menor que 400.

Solución
Sea V el número total de asientos vacíos, contaremos V de dos formas:

- Como hay m filas y en cada una hay dos asientos vacíos, entonces $V = 2m$.
- Como hay n columnas y en cada una hay un asiento vacío, entonces $V = n$.

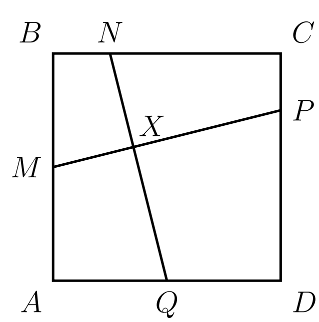
Por lo anterior, tenemos que $n = 2m$. Por otro lado, el número total de asientos del auditorio es $mn = 2m^2$, en consecuencia:

$$350 < 2m^2 < 400,$$

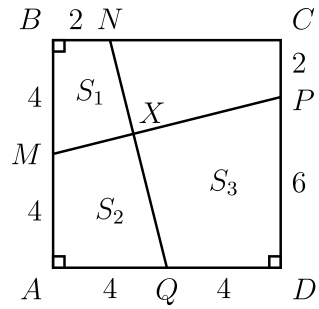
de donde $175 < m^2 < 200$, y tendríamos que $m^2 = 14^2 = 196$ pues es el único cuadrado perfecto en ese intervalo. Finalmente, $2m^2 = 392$.

Respuesta: 392

6. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 8. Si $AM = AQ = 4$ cm y $BN = CP = 2$ cm, halle la diferencia de las áreas de los cuadriláteros $PDQX$ y $MBNX$, en cm^2.



Solución
Sean S_1, S_2 y S_3 las áreas de los cuadriláteros $MBNX$, $AMXQ$ y $PDQX$, respectivamente. Nos piden $S_3 - S_1$. Luego de completar algunas longitudes obtenemos:



Notamos que $ABNQ$ es un trapecio de bases BN y AQ, entonces su área es igual a:

$$S_1 + S_2 = \left(\frac{2+4}{2}\right) \cdot 8 = 24. \tag{1}$$

Análogamente, en el trapecio $DAMP$ de bases AM y DP, tenemos:

$$S_2 + S_3 = \left(\frac{4+6}{2}\right) \cdot 8 = 40. \tag{2}$$

Restando (1) de (2) obtenemos:

$$S_3 - S_1 = 40 - 24 = 16,$$

que es lo que nos piden.

Respuesta: 16

7. Sean x y z números reales tales que

$$\begin{aligned} x^2 + 5xz + z^2 &= 7, \\ x^2z + xz^2 &= 2. \end{aligned}$$

Si $x + z \neq 2$, determina el valor de $(6xz)^2$.

Solución
Sean $s = x + z$ y $p = xz$, como

$$\begin{aligned} x^2 + 5xz + z^2 &= (x+z)^2 + 3xz, \\ x^2z + xz^2 &= (x+z)xz \end{aligned}$$

las ecuaciones del enunciado quedan así:

$$s^2 + 3p = 7, \tag{1}$$
$$sp = 2. \tag{2}$$

Multiplicando ambos lados de (1) por s y usando (2), obtenemos

$$s^3 + 6 = 7s \quad \iff \quad s^3 - 7s + 6 = 0,$$

y es claro que $s = 1$ es solución de esta ecuación. Factorizamos $(s-1)$ (por ejemplo, por el método de Ruffini) y lo que queda se puede factorizar una vez más:

$$(s-1)(s^2 + s - 6) = 0 \quad \iff \quad (s-1)(s-2)(s+3) = 0.$$

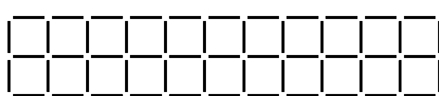
Como $s = x + z \neq 2$, concluimos que $s = 1$ o $s = -3$.

- Si $s = 1$, por (2), tendríamos que $p = 2$, es decir, $x + z = 1$ y $xz = 2$. Reemplazando obtenemos $x^2 - x + 2 = 0$, que no tiene solución en los reales porque el discriminante es $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$. Luego, en este caso no obtenemos valores reales para x y z.
- Si $s = -3$, por (2), tendríamos que $p = -\frac{2}{3}$, es decir, $x + z = -3$ y $xz = -\frac{2}{3}$. Reemplazando obtenemos $x^2 + 3x - \frac{2}{3} = 0$, que sí tiene soluciones reales porque el discriminante es $\Delta = 9 - 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) > 0$.

Concluimos que la única posibilidad es $s = -3$ y $p = -\frac{2}{3}$. Para terminar, nos piden $(6p)^2 = (-4)^2 = 16$.

Respuesta: 16

8. Se tiene 57 palitos que están distribuidos de la siguiente manera



Un *movimiento* consiste en quitar 3 palitos que formen alguna de las siguientes figuras:

¿Cuál es la mayor cantidad de movimientos seguidos que se puede realizar?

Solución

Hay 4 tipos de movimiento, sean a, b, c, d las cantidades de movimientos de cada tipo, indicados a continuación:

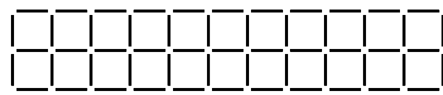
a b c d

Nos piden el mayor valor posible de $a+b+c+d$ (número total de movimientos). Luego de realizar esos movimientos, el número de palitos verticales que se quitaron fue $2a+b+2c+d$ y como al inicio había 24 palitos verticales, tenemos que

$$2a+b+2c+d \leq 24. \tag{1}$$

Por otro lado, notemos que cada movimiento del segundo o cuarto tipo quitan necesariamente un palito de la hilera central:

hilera central →



Como hay 11 palitos en la hilera central, no puede haber más de 11 movimientos del segundo o cuarto tipo, es decir, tenemos que

$$b+d \leq 11. \tag{2}$$

Sumando (1) y (2), obtenemos que $2a+2b+2c+2d \leq 35$, de donde

$$a+b+c+d \leq 17.$$

Para terminar, vamos a dar un ejemplo en el que se realizan exactamente 17 movimientos en total. Primero realizamos 11 movimientos del segundo tipo en la parte superior y nos queda:

Después, realizamos 6 movimientos del primer tipo en la parte inferior y tendríamos $11+6=17$ movimientos en total:

Luego de esto podemos concluir que el mayor número de movimientos que se puede realizar es 17.

Respuesta: 17

9. Sean a, b, c, d números enteros positivos tales que $a > b > c > d$ y además

$$\text{mcd}(a,b) + \text{mcd}(a,c) + \text{mcd}(a,d) = 105.$$

Halla el menor valor posible de a.

Aclaración: $\text{mcd}(r,s)$ denota al máximo común divisor de los números enteros positivos r y s.

Solución

Sean $x = \text{mcd}(a,b)$, $y = \text{mcd}(a,c)$ y $z = \text{mcd}(a,d)$ (es importante mencionar que x, y, z no necesariamente son distintos, a pesar de que b, c, d son distintos). Notemos que cada uno de los números x, y, z es un divisor de a y es menor que a, entonces cada uno pertenece al conjunto $\left\{\frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{4}, \dots\right\}$.

Veamos ahora que entre los números x, y, z no puede haber dos iguales a $\frac{a}{2}$. En efecto, si $\text{mcd}(a,n) = \frac{a}{2}$, con $a > n$, tendríamos que n es múltiplo de $\frac{a}{2}$ y es menor que a, entonces necesariamente $n = \frac{a}{2}$. Luego, si entre los números x, y, z hay dos iguales a $\frac{a}{2}$, tendría que haber dos números iguales a $\frac{a}{2}$ entre los números b, c, d y esto no es cierto porque b, c, d son distintos.

Como dijimos que cada número entre x, y, z pertenece al conjunto $\left\{\frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{4}, \dots\right\}$, y como máximo uno de ellos es igual a $\frac{a}{2}$, el mayor de los tres números es menor o igual que $\frac{a}{2}$ y ninguno de los otros dos podría ser igual a $\frac{a}{2}$, entonces cada uno de los otros dos números es menor o igual que $\frac{a}{3}$. Por lo tanto:

$$105 = x + y + z \leq \frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{3} = \frac{7a}{6},$$

de donde obtenemos que $a \geq 90$. Para conseguir la igualdad, debería cumplirse que entre los números x, y, z hay uno igual a 45 y los otros dos iguales a 30, para esto hacemos $a = 90$, $b = 60$, $c = 45$ y $d = 30$. Con esto ya podemos asegurar que el menor valor posible de a es 90.

Respuesta: 90

10. Determina el menor valor que puede tomar la expresión

$$\frac{ab(a+b-28)}{(a-1)(b-27)},$$

donde a y b son números reales tales que $a > 1$ y $b > 27$.

Solución 1
Como $a > 1$ y $b > 27$, hacemos el cambio de variable $a = x + 1$ y $b = y + 27$, donde x y y son reales positivos. Luego, la expresión que queremos minimizar es

$$\begin{aligned} A = \frac{(x+1)(y+27)(x+y)}{xy} &= \left(\frac{x+1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{27}{y}\right) \cdot (x+y). \\ &= \left(\frac{x+1}{x}\right) \cdot \left(x + 27 + y + \frac{27x}{y}\right) \end{aligned}$$

Para eliminar la variable y (y trabajar solo con una variable), utilizamos la Desigualdad de la Media Aritmética - Media Geométrica de la siguiente forma:

$$y + \frac{27x}{y} \geq 2\sqrt{27x}. \tag{1}$$

Con esto obtenemos que

$$A \geq \left(\frac{x+1}{x}\right) \cdot \left(x + 27 + 2\sqrt{27x}\right) = \left(\frac{x+1}{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{27}\right)^2.$$

Como $x = \sqrt{x}^2$, obtenemos que

$$A \geq (x+1) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{27}{x}}\right)^2 = (1+x) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{27}{x}}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{27}{x}}\right).$$

Esto nos da la idea de plantear y utilizar el siguiente resultado:

Lema. Sean a, b, c reales positivos, se cumple la siguiente desigualdad

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3,$$

y la igualdad se cumple si y solo si $a = b = c$.

Prueba. Al desarrollar ambos lados, nos damos cuenta que sería suficiente demostrar la desigualdad:

$$a + b + c + ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2},$$

lo cual es cierto porque $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ y $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ (por la Desigualdad de las Medias). Es claro que estas dos últimas desigualdades se convierten en igualdades si y solo si $a = b = c$. $\square$

En el lema hacemos $a = x$, $b = \sqrt{\frac{27}{x}}$, $c = \sqrt{\frac{27}{x}}$ y como $abc = 27$ obtenemos

$$(1+x) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{27}{x}}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{27}{x}}\right) \geq (1+3)^3 = 64.$$

Por lo tanto, $A \geq 64$ y la igualdad ocurre cuando $x = \sqrt{\frac{27}{x}} = \sqrt{\frac{27}{x}}$, es decir, cuando $x = 3$. Además, debería darse la igualdad en (1) y esto ocurre cuando $y = \frac{27x}{y}$ y como $x = 3$, obtenemos $y = 9$.

En resumen, el menor valor posible de A es 64 y ocurre cuando $x = 3$ y $y = 9$.

Solución 2

Veremos una forma más corta de demostrar que $A \geq 64$, pero en realidad esta solución está fuertemente influenciada por los valores óptimos de x y y que encontramos en la solución anterior.

Por la Desigualdad de las Medias (en cada caso aplicada a 4 números), tenemos:

$$(x+1) = \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + 1 \geq 4\sqrt[4]{\frac{x^3}{3^3}}$$

$$(y+27) = y + 9 + 9 + 9 \geq 4\sqrt[4]{y \cdot 9^3}$$

$$(x+y) = x + \frac{y}{3} + \frac{y}{3} + \frac{y}{3} \geq 4\sqrt[4]{x \cdot \frac{y^3}{3^3}}$$

Multiplicando estas tres desigualdades obtenemos:

$$(x+1)(y+27)(x+y) \geq 64\sqrt[4]{x^4y^4 \cdot \frac{9^3}{3^3 \cdot 3^3}} = 64xy,$$

pasando a dividir xy obtenemos que $A \geq 64$, además para que se dé la igualdad debería darse la igualdad en las tres desigualdades planteadas, esto ocurre si y solo si $x = 3$ y $y = 9$.

Respuesta: 64