Capítulo 6
Segunda Fase

6.1. Nivel 1

1. Ocho amigos fueron al cine. Ellos pagaron en total 78 soles por sus entradas, incluyendo 2 gaseosas. Si una entrada al cine cuesta lo mismo que 3 gaseosas, ¿cuántos soles cuesta una entrada al cine?

Solución
Sea x el precio de una gaseosa, entonces una entrada al cine cuesta $3x$. Luego, 8 entradas y 2 gaseosas cuestan

$$8 \cdot 3x + 2x = 78,$$

de donde $26x = 78$ y $x = 3$. Por lo tanto, una entrada al cine cuesta $3x = 9$ soles.

Respuesta: 9

2. Un niño escribió en su cuaderno todos los números naturales desde el 1 al 200, de la siguiente forma:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 200.$$

Luego, borró cada número par y en su lugar escribió la mitad de dicho número. Al final de este proceso, en el cuaderno del niño hay 200 números, pero algunos están repetidos. ¿Cuántos números diferentes en total hay en el cuaderno del niño?

Solución
El niño reemplazó cada número par por su mitad, luego, reemplazó los números $2, 4, 6, 8, \ldots, 200$ por $1, 2, 3, 4, \ldots, 100$, respectivamente. Entonces los 200 números (considerando repeticiones) son:

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 197, 199$$
$$1, 2, 3, 4, \ldots, 99, 100.$$

Notamos que los números impares diferentes de ese conjunto son $1, 3, 5, 7, \ldots, 199$ (100 números) y los números pares diferentes de ese conjunto son $2, 4, 6, 8, \ldots, 100$ (50 números). Luego, la cantidad total de números diferentes es $100 + 50 = 150$.

Respuesta: 150

3. La fórmula que utiliza una fábrica para elaborar el color *amatista* es: 50 % de pintura azul, 30 % de pintura roja y 20 % de pintura blanca. Si en el almacén de la fábrica hay 300 litros de pintura azul, 210 litros de pintura de roja y 100 litros de pintura blanca, ¿como máximo cuántos litros del color amatista se puede elaborar?

Solución
Supongamos que se puede elaborar x litros del color amatista, entonces necesitamos $50\,\% \cdot x$ litros de pintura azul, $30\,\% \cdot x$ litros de pintura roja y $20\,\% \cdot x$ litros de pintura blanca. Estas cantidades no deben superar lo que tenemos disponible, es decir:

$$50\,\% \cdot x \leq 300, \quad 30\,\% \cdot x \leq 210 \quad \text{y} \quad 20\,\% \cdot x \leq 100.$$

Simplificando resulta:

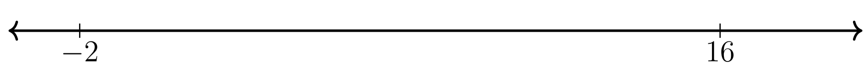
$$x \leq 600, \quad x \leq 700 \quad \text{y} \quad x \leq 500,$$

como x debe cumplir esas tres desigualdades, concluimos que $x \leq 500$. Por lo tanto, el mayor valor posible de x es 500.

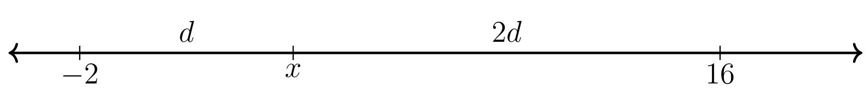
Respuesta: 500

4. Sea x un número entero positivo. La distancia en la recta numérica entre los puntos que representan a los números -2 y x, es igual a la mitad de la distancia entre los puntos que representan a los números 2 y $(x - 14)$. Calcule la suma de los dígitos del número x^3.

Solución
La distancia entre los puntos que representan a los números 2 y $(x - 14)$ es igual a la distancia entre los puntos que representan a los números 16 y x (sumando 14 a ambos números). Tenemos entonces que la distancia entre los puntos que representan a los números -2 y x es igual a la mitad de la distancia entre los puntos que representan los números 16 y x. Ubicamos en la recta numérica los puntos -2 y 16:



Sabemos que x es positivo. Si $x \geq 16$, la distancia entre -2 y x sería mayor que la distancia entre 16 y x, lo cual no es posible. Concluimos que $x < 16$ y tendríamos lo siguiente:



Como la distancia entre -2 y 16 es $16-(-2)=18$, tenemos que $3d=18$ y $d=6$. Por lo tanto, $x=-2+d=4$. Para terminar, nos piden la suma de dígitos de $4^3=64$, que es 10.

Respuesta: 10

5. Luis y Roberto van a trotar a lo largo de una pista circular que tiene una longitud de 400 metros. Se sabe que las velocidades de Luis y Roberto son 130 metros por minuto y 110 metros por minuto, respectivamente. Si Luis y Roberto partirán del mismo lugar y ambos recorrerán la pista en sentido horario, ¿dentro de cuántos minutos (después de la partida) se cruzarán por primera vez?

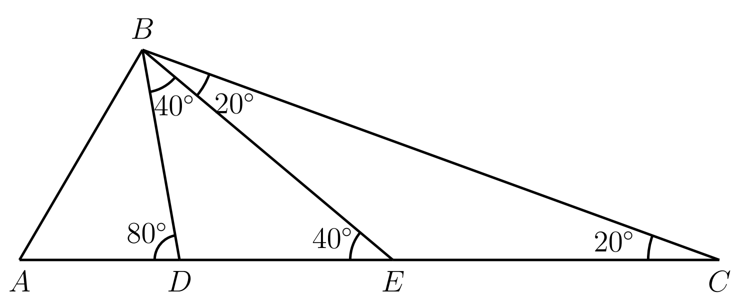
Solución
Desde el inicio Luis le llevará la delantera a Roberto y la distancia entre ellos irá aumentando. La primera vez que se crucen ocurrirá cuando Luis haya recorrido exactamente una vuelta más que Roberto, en otras palabras, cuando Luis haya recorrido 400 metros más que Roberto. Pero cada minuto la diferencia de sus recorridos aumenta en $130-110=20$ metros, entonces dentro de $400\div 20=20$ minutos ocurrirá que Luis ha recorrido 400 metros más que Roberto.

Respuesta: 20

6. Paulo dibujó un triángulo acutángulo ABC y en el lado AC ubicó los puntos D y E, de tal forma que los puntos A, D, E, C aparecen en ese orden. Luego, trazó los segmentos BD y BE. Si los triángulos ABD, BDE y BEC son isósceles, y además, $\angle BDA=80°$, determine la medida de $\angle ABC$.

Nota: Recuerde que un triángulo acutángulo es aquel que tiene sus tres ángulos interiores agudos y un triángulo isósceles es aquel que tiene dos lados iguales.

Solución
Como $\angle BDA=80°$, entonces $\angle BDE=100°$. Notamos que en el triángulo isósceles BDE un ángulo interior mide $100°$, como no puede haber otro ángulo de $100°$, los ángulos que se repiten deben ser los otros dos. Luego, tenemos que $\angle DBE=\angle DEB=40°$. De forma similar, en el triángulo isósceles BEC, tenemos que $\angle BEC=140°$ y en consecuencia, $\angle EBC=\angle ECB=20°$.



Analicemos ahora el triángulo isósceles ABD, tenemos tres casos. Si $DB = DA$ entonces $\angle ABD = 50°$ y tendríamos que $\angle ABC = 110°$, con lo cual el triángulo ABC no sería acutángulo. Si $AB = AD$ entonces $\angle ABD = 80°$ y obtenemos una contradicción como en el caso anterior. Concluimos que $BA = BD$, $\angle BAC = 80°$ y $\angle ABC = 80°$ (el triángulo ABC sería acutángulo).

Respuesta: 80

7. La suma de dos divisores positivos del número 45^5 es 400, calcule la diferencia de esos divisores.

Solución
La descomposición canónica de 45^5 es $3^{10} \times 5^5$. Sean d_1 y d_2 dos divisores de $3^{10} \times 5^5$ tales que $d_1 + d_2 = 400$. Notemos que no es posible que los dos números d_1 y d_2 sean múltiplos de 3 (porque 400 no es múltiplo de 3), luego, podemos suponer que uno de ellos no es múltiplo de 3. Supongamos que d_1 no es múltiplo de 3, como d_1 es un divisor de $3^{10} \times 5^5$, concluimos que d_1 es un divisor de 5^5 debido a que no contiene el factor primo 3. Notamos que d_1 es una potencia de 5 y es menor que 400, entonces $d_1 \in \{1, 5, 5^2, 5^3\}$.

- Si $d_1 = 1$ entonces $d_2 = 399 = 3 \times 7 \times 19$, que no es un divisor de $3^{10} \times 5^5$.
- Si $d_1 = 5$ entonces $d_2 = 395 = 5 \times 79$, que no es un divisor de $3^{10} \times 5^5$.
- Si $d_1 = 25$ entonces $d_2 = 375 = 3 \times 5^3$, que sí es un divisor de $3^{10} \times 5^5$.
- Si $d_1 = 125$ entonces $d_2 = 5^2 \times 11$, que no es divisor de $3^{10} \times 5^5$.

Por lo tanto, $d_1 = 25$ y $d_2 = 375$ es la única solución. La diferencia requerida es $375 - 25 = 350$.

Respuesta: 350

8. Decimos que dos enteros positivos son *amigos* si su diferencia es un divisor de su suma. Por ejemplo, los números 3 y 5 son amigos porque 2 es un divisor de 8.

Se tiene cuatro enteros positivos tales que cualesquiera dos de ellos son amigos. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar la suma de esos cuatro números?

Solución
Sea $\mathcal{C}$ el conjunto formado por los cuatro números. Consideremos tres casos:

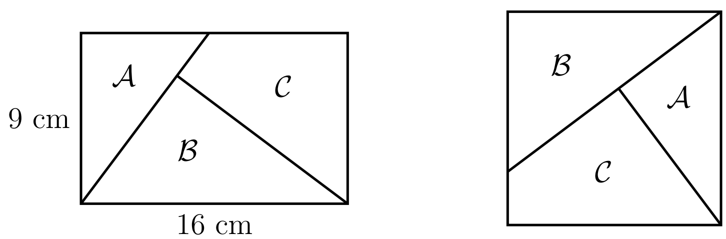
- El menor elemento de $\mathcal{C}$ es 1. Si $n + 1$ es cualquier otro elemento, donde n es un entero positivo, como 1 y $n+1$ son amigos tenemos que n es un divisor de $n + 2$. Luego, n es un divisor de 2 con lo cual n es 1 o 2. Esto significa que 1 solo es amigo de 2 y 3, lo cual es una contradicción porque 1 debe tener tres amigos.

- El menor elemento de $\mathcal{C}$ es 2. Si $n+2$ es cualquier otro elemento, donde n es un entero positivo, tenemos que n es un divisor de $n+4$. Luego, n es 1, 2 o 4. Esto significa que los otros elementos de $\mathcal{C}$ deben ser 3, 4 y 6. Es más, el conjunto $\mathcal{C} = \{2, 3, 4, 6\}$ cumple que cualesquiera dos de sus elementos son amigos. En este caso la suma de los elementos es $2+3+4+6 = 15$.
- El menor elemento de $\mathcal{C}$ es al menos 3. En este caso la suma de los elementos es como mínimo $3+4+5+6 = 18$.

Concluimos que la menor suma de elementos de $\mathcal{C}$ se consigue en el segundo caso y es 15.

Respuesta: 15

9. El rectángulo de la izquierda, que tiene 16 cm de base y 9 cm de altura, está dividido en tres piezas $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$. Con las mismas piezas se armó el cuadrado de la derecha.

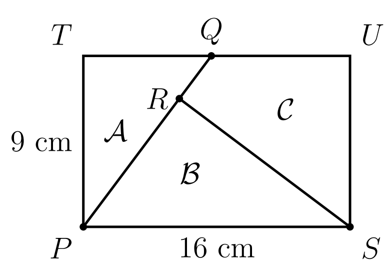


Determine la suma de los perímetros de las piezas $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, en cm.

Solución

Al decir rectángulo de la izquierda o cuadrado de la derecha nos referimos a las figuras del enunciado.

La suma de las áreas de las tres piezas es $9 \times 16 = 144$ cm^2, entonces el lado del cuadrado de la derecha mide 12 cm. A partir del rectángulo de la izquierda, notamos que $\mathcal{A}$ es un triángulo rectángulo y a partir del cuadrado de la derecha, notamos que su hipotenusa mide 12 cm. Luego, en la siguiente figura, tenemos que $PQ = 12$ cm. Por otro lado, en el cuadrado de la derecha notamos que $\mathcal{B}$ es un triángulo rectángulo tal que uno de sus catetos mide 12 cm y el otro es menor que 12 cm. Como $PR < PQ = 12$ cm, concluimos que $RS = 12$ cm.



Notemos ahora que si calculamos la suma de los perímetros de las piezas $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, los lados del rectángulo $PTUS$ aparecen como sumandos una vez, mientras que los segmentos PR, RQ y RS aparecen como sumandos exactamente dos veces (por ejemplo, el segmento PR se cuenta dos veces porque es parte del perímetro de las piezas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$). Entonces la suma pedida es igual a:

$$\begin{aligned} & \text{Perímetro}(PTUS) + 2(PR + RQ + RS) \\ = & \text{Perímetro}(PTUS) + 2(PQ + RS) \\ = & 2(9 + 16) + 2(12 + 12) \\ = & 98(\text{cm}) \end{aligned}$$

Respuesta: 98

10. Al inicio, en cada casilla de un tablero de 22 casillas está escrito el número 0. Se van a realizar 22 operaciones, una a continuación de la otra: En la operación 1 se escoge una casilla y se suma 1 al número de esa casilla, en la operación 2 se escogen 2 casillas adyacentes y se suma 1 a los números de esas 2 casillas, en la operación 3 se escogen 3 casillas adyacentes y se suma 1 a los números de esas 3 casillas, en la operación 4 se escogen 4 casillas adyacentes y se suma 1 a los números de esas 4 casillas, así sucesivamente hasta que en la operación 22 se suma 1 a los números de todas las casillas. Luego de realizar las 22 operaciones, ¿como máximo cuántos números impares puede haber en las casillas?

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Solución

Al inicio la suma de todos los números es 0, entonces después de realizar las 22 operaciones la suma de todos los números es $0+1+2+3+\cdots+22 = \frac{22\times 23}{2} = 253$. Como 253 es impar, no es posible que los 22 números que están escritos en las casillas sean impares. Ahora vamos a mostrar, mediante un ejemplo, que sí es posible conseguir que haya 21 números impares (en realidad esta es la parte difícil del problema), con lo cual ya podemos concluir que la respuesta del problema es 21.

Es claro que el resultado final no depende del orden en que se consideren las operaciones, así que realizamos las siguientes 18 operaciones agrupadas en 9 parejas. Note que estas 18 operaciones solo afectan a las 19 primeras casillas:

- Aplicamos la operación 1 a la primera casilla y la operación 18 a las 18 casillas siguientes.
- Aplicamos la operación 2 a las 2 primeras casillas y la operación 17 a las 17 casillas siguientes.
- Aplicamos la operación 3 a las 3 primeras casillas y la operación 16 a las 16 casillas siguientes.

- Aplicamos la operación 4 a las 4 primeras casillas y la operación 15 a las 15 casillas siguientes.

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

- Aplicamos la operación 9 a las 9 primeras casillas y la operación 10 a las 10 casillas siguientes.

En cada pareja de operaciones se suma 1 a todas las 19 primeras casillas, entonces despúes de estas 9 parejas de operaciones tenemos lo siguiente:

9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	0	0	0

Nos falta realizar las operaciones 19, 20, 21 y 22. Para terminar, realizaremos estas operaciones empezando todas en la primera casilla y así obtenemos:

13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	3	2	1

Como se puede observar, hay 21 números impares. Por lo tanto, 21 es el máximo que buscamos.

Respuesta: 21