VI Taller de Olimpiadas Matemáticas para Profesores 2016

Ecuaciones Funcionales

María Huánuco Candia

Sustituir las variables por valores o por otras variables

1 Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)) \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

[Korea, 2000]

Solución. Sustituyendo $y \to x$, tenemos que

$$\begin{aligned} & f(x^2 - x^2) = (x - x)(f(x) + f(x)) \\ \Rightarrow \quad & f(0) = 0. \end{aligned}$$

Reemplazando $x = -1$, $y = 0$, obtenemos que

$$\begin{aligned} & f((-1)^2) = (-1)(f(-1) + f(0)) \\ \Rightarrow \quad & f(1) = -f(-1). \end{aligned}$$

Ahora, si tomamos $y = 1$ en la ecuación original, resulta que

$$f(x^2 - 1) = (x - 1)(f(x) + f(1)). \tag{1}$$

Asimismo, al hacer $y = -1$ en la ecuación original y usar que $f(1) = -f(-1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} & f(x^2 - (-1)^2) = (x - (-1))(f(x) + f(-1)) \\ \Rightarrow \quad & f(x^2 - 1) = (x + 1)(f(x) - f(1)). \end{aligned} \tag{2}$$

Igualando (1) y (2), obtenemos que

$$\begin{aligned} (x + 1)(f(x) - f(1)) &= (x - 1)(f(x) + f(1)) \\ (x + 1)f(x) - (x + 1)f(1) &= (x - 1)f(x) + (x - 1)f(1) \\ (x + 1 - x + 1)f(x) &= (x - 1 + x + 1)f(1) \\ 2f(x) &= 2xf(1) \\ \Rightarrow \quad f(x) &= xf(1), \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Finalmente, las funciones que satisfacen la ecuación dada son de la forma $f(x) = cx$ con $c \in \mathbb{R}$ constante. Es sencillo verificar que todas estas funciones satisfacen las condiciones del problema. □

$\boxed{\mathbf{2}}$ Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x+y) + xy = f(x)f(y), \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

[India, 2010]

Solución. Reemplazando $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación, tenemos que $f(0) = f(0)^2$ por lo que $f(0) = 0$ o $f(0) = 1$. Evaluemos ambos casos:

- Si $f(0) = 0$, haciendo $y = 0$ en la ecuación funcional, obtenemos que

  $$f(x) = f(x)f(0) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

  pero la función idénticamente nula no cumple la ecuación funcional. Por lo tanto, en este caso no hay solución.

- Si $f(0) = 1$, reemplazando $x = 1$ y $y = -1$ en la ecuación, tenemos que

  $$f(1)f(-1) = f(1-1) + (1)(-1) = f(0) - 1 = 0,$$

  por lo que $f(1) = 0$ o $f(-1) = 0$.

  * Si $f(1) = 0$, al tomar $y = 1$ y sustituyendo $x \to x - 1$ en la ecuación, obtenemos que

    $$\begin{aligned} f(x-1+1) + (x-1)(1) &= f(x-1)f(1) \\ f(x) + x - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \quad f(x) &= 1 - x. \end{aligned}$$

    Además, $f(x+y) + xy = 1 - x - y + xy = (1-x)(1-y) = f(x)f(y)$, por lo que está función es una solución.

  * Si $f(-1) = 0$, al tomar $y = -1$ y sustituyendo $x \to x + 1$ en la ecuación, obtenemos que

    $$\begin{aligned} f(x+1-1) + (x+1)(-1) &= f(x+1)f(-1) \\ f(x) - x - 1 &= 0 \\ \Rightarrow \quad f(x) &= x + 1. \end{aligned}$$

    Asimismo, $f(x+y) + xy = x + y + 1 + xy = (x+1)(y+1) = f(x)f(y)$, por lo que está función también es una solución.

Finalmente, las soluciones de la ecuación funcional son $f(x) = 1 - x$ y $f(x) = x + 1$. $\square$

$\boxed{\textbf{3}}$ Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que, para cualesquiera x, y, u, v reales, se cumple

$$(f(x) + f(y))(f(u) + f(v)) = f(xu - yv).$$

[IMO, 2002]

Solución. Al sustituir $y \to x$ y $v \to u$, obtenemos que

$$\begin{aligned} (f(x) + f(x))(f(u) + f(u)) &= f(xu - xu) \\ (2f(x))(2f(u)) &= f(0) \\ \Rightarrow \quad 4f(x)f(u) &= f(0) \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora, al reemplazar $x = 0$ y $u = 0$ en (1), resulta que

$$\begin{aligned} 4(f(0))^2 &= f(0) \\ \Rightarrow \quad f(0)(4f(0) - 1) &= 0, \end{aligned}$$

por lo que $f(0) = 0$ o $f(0) = \dfrac{1}{4}$. Evaluemos ambos casos:

- Si $f(0) = 0$, reemplazando en (1) y sustituyendo $u \to x$, tenemos que

$$\begin{aligned} 4(f(x))^2 &= 0 \\ \Rightarrow \quad f(x) &= 0, \end{aligned}$$

  para todo $x \in \mathbb{R}$. Además, esta función verifica la ecuación funcional.

- Si $f(0) = \dfrac{1}{4}$, al tomar $u = 0$ en (1), resulta que

$$\begin{aligned} 4f(x)f(0) &= f(0) \\ 4\left(\frac{1}{4}\right) f(x) &= \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \quad f(x) &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

  para todo $x \in \mathbb{R}$ y esta función también verifica las condiciones del problema.

Finalmente, de ambos casos concluimos que $f(x) = 0$ y $f(x) = \dfrac{1}{4}$ son las únicas soluciones.

$\square$

$\boxed{\textbf{4}}$ Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

para todos los números reales x e y.

[IMO, 2015]

Solución. Reemplazando $x = 0$ y $y = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(f(0)) + f(0) &= f(0) \\ \Rightarrow \quad f(f(0)) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora, al tomar $x = 0$ y $y = f(0)$ y usar (1), obtenemos que

$$\begin{aligned} f(f(f(0))) + f(0) &= f(f(0)) + f(0)f(0) \\ f(0) + f(0) &= f(0)^2 \\ 2f(0) &= f(0)^2 \\ \Rightarrow \quad f(0)(f(0) - 2) &= 0, \end{aligned}$$

por lo que $f(0) = 0$ o $f(0) = 2$. Evaluemos ambos casos:

- Si $f(0) = 2$, entonces $f(2) = f(f(0)) = 0$. Luego, al hacer $y = 1$ en la ecuación original tenemos que

$$\begin{aligned} f(x + f(x+1)) + f(x) &= x + f(x+1) + f(x) \\ \Rightarrow \quad f(x + f(x+1)) &= x + f(x+1). \end{aligned} \tag{2}$$

  Además, al reemplazar $x = 0$ y sustituir $y \to x + f(x+1)$ en la ecuación inicial y usar (2), obtenemos que

$$\begin{aligned} f(f(x + f(x+1))) + f(0) &= f(x + f(x+1)) + (x + f(x+1))f(0) \\ x + f(x+1) + 2 &= x + f(x+1) + 2(x + f(x+1)) \\ 2 &= 2(x + f(x+1)) \\ 1 &= x + f(x+1) \\ \Rightarrow \quad f(x+1) &= 1 - x, \end{aligned}$$

  o equivalentemente, se cumple que $f(x) = 2 - x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se verifica que esta función satisface la ecuación, pues

$$\begin{aligned} f(x + f(x+y)) + f(xy) &= f(x + 2 - x - y) + 2 - xy \\ &= f(2 - y) + 2 - xy \\ &= 2 - 2 + y + 2 - xy \\ &= y + 2 - xy \\ &= x + 2 - x - y + 2y - xy \\ &= x + f(x+y) + y(2 - x) \\ &= x + f(x+y) + yf(x). \end{aligned}$$

- Si $f(0) = 0$, al tomar $y = 0$ en la ecuación original, tenemos que

$$f(x + f(x)) = x + f(x). \tag{3}$$

  Además, al reemplazar $y = 1$ y sustituir $x \to x - 1$ obtenemos que

$$\begin{aligned} f(x - 1 + f(x)) + f(x-1) &= x - 1 + f(x) + f(x-1) \\ \Rightarrow \quad f(x - 1 + f(x)) &= x - 1 + f(x). \end{aligned} \tag{4}$$

En el resultado (4) al tomar $x = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(-1 + f(0)) &= -1 + f(0) \\ \Rightarrow \quad f(-1) &= -1. \end{aligned}$$

Ahora, haciendo $x = 1$ y $y = -1$ en la ecuación inicial, resulta que

$$\begin{aligned} f(1 + f(0)) + f(-1) &= 1 + f(0) - f(1) \\ f(1) - 1 &= 1 - f(1) \\ \Rightarrow \quad f(1) &= 1. \end{aligned}$$

Al tomar $x = 1$, sustituir $y \to x - 1 + f(x)$ y usar(3) y (4), obtenemos que

$$\begin{aligned} f(1 + f(1 + x - 1 + f(x))) + f(x - 1 + f(x)) &= 1 + f(1 + x - 1 + f(x)) + (x - 1 + f(x))f(1) \\ f(1 + f(x + f(x))) + x - 1 + f(x) &= 1 + f(x + f(x)) + x - 1 + f(x) \\ \Rightarrow \quad f(1 + x + f(x)) &= 1 + x + f(x), \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$f(x + f(x - 1)) = x + f(x - 1). \tag{5}$$

Luego, reemplazando $y = -1$ en la ecuación inicial y usando (5), tenemos que

$$\begin{aligned} f(x + f(x - 1)) + f(-x) &= x + f(x - 1) - f(x) \\ x + f(x - 1) + f(-x) &= x + f(x - 1) - f(x) \\ \Rightarrow \quad f(-x) &= -f(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Por un lado, al sustituir $y \to -x$, resulta que

$$\begin{aligned} f(x + f(0)) + f(-x^2) &= x + f(0) - xf(x) \\ \Rightarrow \quad f(x) + f(-x^2) &= x - xf(x). \end{aligned} \tag{7}$$

Por otro lado, al sustituir $x \to -x$ y $y \to x$, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(-x + f(0)) + f(-x^2) &= -x + f(0) + xf(-x) \\ \Rightarrow \quad f(-x) + f(-x^2) &= -x + xf(-x). \end{aligned} \tag{8}$$

Finalmente, restando (7) y (8) y usando (6), tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) - f(-x) &= x - xf(x) + x - xf(-x) \\ f(x) + f(x) &= 2x - xf(x) + xf(x) \\ 2f(x) &= 2x \\ \Rightarrow \quad f(x) &= x, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Se verifica fácilmente que la función satisface las condiciones del problema.

En conclusión, de ambos casos, observamos que las dos únicas soluciones de la ecuación funcional son $f(x) = 2 - x \ \forall x \in \mathbb{R}$ y $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\square$

5 Hallar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que satisfacen que $f(1) = 3$, $f(2) = 2$ y

$$f(n+2) + \frac{1}{f(n)} = 2, \text{ para todos } n \in \mathbb{N}.$$

Solución. Observemos que de la ecuación original obtenemos que

$$f(3) = 2 - \frac{1}{f(1)} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \text{ y } f(4) = 2 - \frac{1}{f(2)} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}.$$

De estos resultados, podemos estimar que $f(n) = \dfrac{n+2}{n}$ se cumple para todo número natural n. Probaremos que esto es verdad por inducción. De los datos, tenemos que efectivamente está conjetura es cierta para los casos base $n = 1$ y $n = 2$. Ahora, suponiendo que es cierto para n (hipótesis inductiva) probaremos que también se verifica para $n+2$. En efecto, puesto que $f(n) = \dfrac{n+2}{n}$, tenemos que

$$f(n+2) = 2 - \frac{1}{f(n)} = 2 - \frac{n}{n+2} = \frac{2n+4-n}{n+2} = \frac{n+4}{n+2}$$

.

En conclusión, $f(n) = \dfrac{n+2}{n}$ para todo número natural n es solución de la ecuación funcional. □

6 Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función con las siguientes propiedades:

(i) $f(2) = 2$.

(ii) $f(mn) = f(m)f(n)$, para cada m y n.

(iii) $f(m) > f(n)$, para $m > n$.

Demostrar que $f(n) = n$.

[Canadá, 1969]

Solución. Reemplazando $m = 1$ y $n = 1$, tenemos que $f(1) = f(1)^2$ y como $f(1) \in \mathbb{N}$, entonces $f(1) = 1$. De este resultado y del dato que $f(2) = 2$ podemos inferir que $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, además de observar que efectivamente cumple las condiciones del problema. Comprobaremos que esto es cierto por inducción. Los casos base $n = 1$ y $n = 2$ cumplen. Ahora, probaremos que si nuestra conjetura es cierta para todo número menor o igual a n (hipótesis inductiva), entonces también es cierta para $n+1$. En efecto, evaluaremos dos casos:

- Cuando $n = 2k - 1$, puesto que $k \leq 2k - 1$, tenemos por la condición (ii) y por la hipótesis inductiva que
$$f(2k) = f(2)f(k) = 2k.$$

- Cuando $n = 2k$, puesto que $k+1 \leq 2k$, tenemos por la condición (ii) y por la hipótesis inductiva que
$$f(2k+2) = f(2)f(k+1) = 2(k+1) = 2k+2.$$
Además, por la condición (iii)
$$2k = f(2k) < f(2k+1) < f(2k+2) = 2k+2,$$
por lo que $f(2k+1) = 2k+1$.

En ambos casos, hemos probado que nuestra afirmación también es cierta para $n+1$, con lo que concluye la inducción.

Por lo tanto, $f(n) = n$ para todo n natural. □

7 Encontrar todas las funciones f que van de $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ en si mismo, que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $f(x+1) = f(x) + 1$, para todo $x \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$.

(ii) $f(x^2) = f(x)^2$, para todo $x \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$

[Ucrania, 1997]

Solución. Probaremos por inducción que $f(x+n) = f(x) + n$ para todo $x \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$. En efecto, el caso base $n = 1$ es cierto por la condición (i). Ahora, supongamos que nuestra conjetura es cierta para n (hipótesis inductiva), entonces por la condición (i)
$$f(x+n+1) = f(x+n) + 1 = f(x) + n + 1,$$
por lo que nuestra afirmación también es cierta para $n+1$ con lo que concluye nuestra inducción.

Luego, tomando $x = \dfrac{p}{q} + q$, con $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $q \in \mathbb{N}$, en la condición (ii) y aplicando el resultado anterior, tenemos que
$$\begin{aligned}
f\left(\left(\frac{p}{q}+q\right)^2\right) &= \left(f\left(\frac{p}{q}+q\right)\right)^2 \\
f\left(\frac{p^2}{q^2}+2q\frac{p}{q}+q^2\right) &= \left(f\left(\frac{p}{q}\right)+q\right)^2 \\
f\left(\frac{p^2}{q^2}+2p+q^2\right) &= f\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2qf\left(\frac{p}{q}\right) + q^2 \\
f\left(\frac{p^2}{q^2}\right)+2p+q^2 &= f\left(\frac{p^2}{q^2}\right) + 2qf\left(\frac{p}{q}\right) + q^2 \\
2p &= 2qf\left(\frac{p}{q}\right) \\
\Rightarrow \quad f\left(\frac{p}{q}\right) &= \frac{p}{q}.
\end{aligned}$$

En conclusión, $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$. □

Considerar propiedades de las funciones

$\boxed{8}$ Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función que cumple que

$$f(f(m) + f(n)) = m + n, \text{ para todos } m, n.$$

Encontrar todos los posibles valores de $f(1988)$

[Lista Corta IMO, 1988]

Solución. Notemos que si $f(m) = f(n)$, entonces

$$\begin{aligned} f(m) + f(1) &= f(n) + f(1) \\ f(f(m) + f(1)) &= f(f(n) + f(1)) \\ m + 1 &= n + 1 \\ \Rightarrow \quad m &= n, \end{aligned}$$

es decir, f es inyectiva.

Ahora, observando la ecuación funcional, podemos conjeturar que $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probaremos por inducción que esto es cierto. Primero, hallemos el valor de $f(1)$. Sea $a = f(1)$, por lo que tomado $m = 1$ y $n = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(f(1) + f(1)) &= 1 + 1 \\ \Rightarrow \quad f(2a) &= 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Además, tomando $m = 1$ y $n = 2a$ y usando (1), resulta que

$$\begin{aligned} f(f(1) + f(2a)) &= 1 + 2a \\ \Rightarrow \quad f(a + 2) &= 1 + 2a. \end{aligned} \tag{2}$$

Si $a \geq 2$, entonces $a - 1 \in \mathbb{N}$. Luego, al hacer $m = a - 1$ y $n = a + 2$ y usar (2), obtenemos que

$$\begin{aligned} f(f(a - 1) + f(a + 2)) &= a - 1 + a + 2 \\ \Rightarrow \quad f(f(a - 1) + 1 + 2a) &= 1 + 2a. \end{aligned} \tag{3}$$

Por lo tanto, al igualar (2) y (3), tenemos que $f(a + 2) = f(f(a - 1) + 1 + 2a)$, pero f es inyectiva y en consecuencia,

$$\begin{aligned} a + 2 &= f(a - 1) + 1 + 2a \\ \Rightarrow \quad f(a - 1) &= 1 - a, \end{aligned} \tag{3}$$

lo que es absurdo, pues $1 - a < 0$. En conclusión, $a < 2$ y como $a \in \mathbb{N}$, se cumple que $a = 1$, lo que implica que $f(1) = 1$ que es el caso base de nuestra inducción. Luego, supongamos que $f(n) = n$ (hipótesis inductiva), entonces

$$f(n + 1) = f(f(n) + f(1)) = n + 1,$$

es decir, nuestra conjetura también es cierta para $n + 1$, con lo que concluye la inducción.

Finalmente, $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ es la única solución de la ecuación funcional y el único valor de $f(1988)$ es 1988. $\square$

$\boxed{9}$ Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x), \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

[Lista Corta IMO, 2002]

Solución. Sustituyendo $y \to -f(x)$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(f(x) - f(x)) &= 2x + f(f(-f(x)) - x) \\ \Rightarrow \quad f(0) &= 2x + f(f(-f(x)) - x). \end{aligned} \tag{1}$$

Al sustituir $x \to \dfrac{f(0) - x}{2}$ en la ecuación (1), obtenemos que

$$f(0) = 2\frac{f(0) - x}{2} + f\left(f\left(-f\left(\frac{f(0) - x}{2}\right)\right) - \frac{f(0) - x}{2}\right).$$

Denotando

$$z = f\left(-f\left(\frac{f(0) - x}{2}\right)\right) - \frac{f(0) - x}{2},$$

se cumple que

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0) - x + f(z) \\ \Rightarrow \quad f(z) &= x, \end{aligned}$$

es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = x$, por lo que f es sobreyectiva.

En particular, existe z_0 tal que $f(z_0) = 0$ y reemplazando $x = z_0$ en la función original, tenemos que

$$\begin{aligned} f(f(z_0) + y) &= 2z_0 + f(f(y) - z_0) \\ f(y) &= 2z_0 + f(f(y) - z_0) \\ \Rightarrow \quad f(f(y) - z_0) &= (f(y) - z_0) - z_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora, como f es sobreyectiva, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe w tal que $f(w) = x + z_0$, pues $x + z_0$ también pertenece a $\mathbb{R}$. Por lo tanto, si para cada x, reemplazamos y por w, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(f(w) - z_0) &= (f(w) - z_0) - z_0 \\ f(x + z_0 - z_0) &= (x + z_0 - z_0) - z_0 \\ \Rightarrow \quad f(x) &= x - z_0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

En conclusión, las soluciones de la ecuación funcional son de la forma $f(x) = x - c$, donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante. Es fácil comprobar que todas estás verifican la ecuación funcional. $\square$

Monotonía

$\boxed{\textbf{10}}$ Encontrar todas las funciones estrictamente crecientes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfacen

$$f(nf(m)) = m^2 f(nm), \text{ para todos } n, m \in \mathbb{N}.$$

[OIM, 1993]

Solución. Al reemplazar $n = 1$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(f(m)) = m^2 f(m). \quad (1)$$

Por lo tanto si $f(m) = f(n)$ y usamos (1), entonces

$$f(f(m)) = f(f(n)) \quad \Rightarrow \quad m^2 f(m) = n^2 f(n) \quad \Rightarrow \quad m^2 = n^2 \quad \Rightarrow \quad m = n,$$

es decir, f es inyectiva.

Observación.

Pudimos haber omitido esta demostración de la inyectividad de f y reemplazarla por el hecho de que al ser f estrictamente creciente, entonces necesariamente es inyectiva.

Ahora, sustituyendo $n \to f(n)$ en la ecuación funcional inicial y usando (1), tenemos que

$$f(f(n)f(m)) = m^2 f(f(n)m) = m^2 n^2 f(nm) = (mn)^2 f(mn) = f(f(mn)),$$

como f es inyectiva, entonces

$$f(n)f(m) = f(mn). \quad (2)$$

Observamos que $f(m) = m^2$ es una solución de la ecuación funcional. Probaremos que es la única solución. En efecto, supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(m) \neq m^2$. Evaluaremos los siguientes casos:

- Si $f(m) > m^2$, como f es estrictamente creciente, entonces $f(f(m)) > f(m^2)$. De (1) y (2), concluimos que

$$\begin{aligned} f(f(m)) &> f(m \cdot m) \\ m^2 f(m) &> f(m)f(m) \\ m^2 &> f(m), \end{aligned}$$

  lo que es una contradicción.

- Si $f(m) < m^2$, como f es estrictamente creciente, entonces $f(f(m)) < f(m^2)$. De (1) y (2), tenemos que

$$\begin{aligned} f(f(m)) &< f(m \cdot m) \\ m^2 f(m) &< f(m)f(m) \\ m^2 &< f(m), \end{aligned}$$

  lo que también es una contradicción.

Finalmente, se cumple que $f(m) = m^2$ para todo $m \in \mathbb{N}$ es la única solución de la ecuación funcional. $\square$

$\boxed{11}$ Hallar todas las funciones estrictamente monótonas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \text{ para } x, y \in \mathbb{R}.$$

[Italia, 1999]

Solución. Primero, notemos que al ser f estrictamente monótona, entonces es inyectiva. Luego, al reemplazar $x = 0$ y $y = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} & f(f(0)) = f(0) \\ \Rightarrow \quad & f(0) = 0. \end{aligned}$$

Ahora, al reemplazar solo $x = 0$ en la ecuación original, resulta que

$$\begin{aligned} & f(f(y)) = f(0) + y \\ \Rightarrow \quad & f(f(y)) = y \end{aligned} \tag{1}$$

para todo $y \in \mathbb{R}$.

A continuación, evaluemos los casos para f:

- Cuando f es estrictamente creciente, entonces tenemos dos opciones:
  - ∗ Si $f(x) > x$, se cumple que
  $$x = f(f(x)) > f(x) > x,$$
  lo que es una contradicción.
  - ∗ Si $f(x) \leq x$, se cumple que
  $$x = f(f(x)) \leq f(x) \leq x,$$
  por lo que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Efectivamente está función verifica la ecuación funcional.
- Cuando f es estrictamente decreciente. Al sustituir $x \to -f(x)$ y $y \to x$ resulta que
$$\begin{aligned} f(-f(x) + f(x)) &= f(-f(x)) + x \\ f(0) &= f(-f(x)) + x \\ \Rightarrow \quad f(-f(x)) &= -x, \end{aligned}$$
pero, por (1), se cumple que $f(f(-x)) = -x$, es decir, $f(f(-x)) = f(-f(x))$. Por lo tanto, como f es inyectiva, tenemos que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Evaluamos las siguientes dos opciones:
  - ∗ Si $f(x) > -x$, se cumple que
  $$x = f(f(x)) < f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad -x > f(x),$$
  lo que es una contradicción.
  - ∗ Si $f(x) \leq -x$, se cumple que
  $$x = f(f(x)) \geq f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad -x \leq f(x),$$
  por lo que $f(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es sencillo verificar que esta función también cumple las condiciones del enunciado.

Finalmente, de ambos casos, $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $f(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ son las soluciones del problema. □

Definición de nuevas funciones

$\boxed{\textbf{12}}$ Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x^2) - f(y^2) = (x+y)(f(x) - f(y)), \text{ para } x, y \in \mathbb{R}.$$

Solución. Definamos $g(x) = f(x) - f(0)$. Reemplazando en la ecuación, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(x^2) - f(y^2) &= (x+y)(f(x) - f(y)) \\ g(x^2) + f(0) - (g(y^2) + f(0)) &= (x+y)(g(x) - f(0) - (g(y) - f(0))) \\ \Rightarrow \quad g(x^2) - g(y^2) &= (x+y)(g(x) - g(y)), \end{aligned} \tag{1}$$

es decir, g cumple la misma ecuación funcional, pero con la condición que

$$g(0) = f(0) - f(0) = 0.$$

Ahora, reemplazando $y = 0$ en la ecuación (1), tenemos que

$$\begin{aligned} g(x^2) - g(0) &= x(g(x) - g(0)) \\ \Rightarrow \quad g(x^2) &= xg(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Asimismo, reemplazando $y = 1$ en la ecuación (1), obtenemos que

$$\begin{aligned} g(x^2) - g(1) &= (x+1)(g(x) - g(1)) \\ \Rightarrow \quad g(x^2) &= (x+1)(g(x) - g(1)) + g(1). \end{aligned} \tag{3}$$

Luego, igualando la ecuación (2) y la ecuación (3), resulta que

$$\begin{aligned} xg(x) &= = (x+1)(g(x) - g(1)) + g(1) \\ xg(x) &= = xg(x) - xg(1) + g(x) \\ \Rightarrow \quad g(x) &= xg(1). \end{aligned}$$

Puesto que $g(1) = f(1) - f(0)$, concluimos que

$$f(x) = g(x) + f(0) = xg(1) + f(0) = x(f(1) - f(0)) + f(0).$$

Finalmente, al definir $a = f(1) - f(0)$ y $b = f(0)$, tenemos que las soluciones de la ecuación funcional son de la forma $f(x) = ax + b$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y es sencillo que todas estas funciones cumplen. $\square$

$\boxed{\textbf{13}}$ Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x - f(y)) = x + y - f(x), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Solución. Sustituyendo $y \to x$, tenemos que

$$f(x - f(x)) = 2x - f(x). \tag{1}$$

Ahora, definamos $g(x) = x - f(x)$. Reemplazando en (1), resulta que

$$\begin{aligned} f(x - f(x)) &= x + x - f(x) \\ f(g(x)) &= x + g(x) \\ f(g(x)) - g(x) &= x \\ g(x) - f(g(x)) &= -x \\ \Rightarrow \quad g(g(x)) &= -x, \end{aligned} \tag{2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Reemplazando $x = f(0)$ y $y = 0$ en la ecuación original, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(f(0) - f(0)) &= f(0) - f(f(0)) \\ f(0) &= f(0) - f(f(0)) \\ \Rightarrow \quad f(f(0)) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Por otro lado, $g(f(0)) = f(0) - f(f(0)) = f(0)$, aplicando g a este resultado y usando (2), tenemos que

$$\begin{aligned} g(g(f(0))) &= g(f(0)) \\ -f(0) &= f(0) \\ \Rightarrow \quad f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, al hacer $y = 0$ en la ecuación funcional original, resulta que

$$\begin{aligned} f(x - f(0)) &= x - f(x) \\ f(x) &= x - f(x) \\ 2f(x) &= x \\ \Rightarrow \quad f(x) &= \frac{x}{2}, \end{aligned}$$

para todo x. Al verificar si esta función cumple, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x - f(y)) &= x + y - f(x) \\ f(x - \frac{y}{2}) &= x + y - \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} &= \frac{x}{2} + y \\ y + \frac{y}{4} &= 0 \\ \Rightarrow \quad y &= 0, \end{aligned}$$

es decir, solo se verifica para $y = 0$, pero se debe verificar para todo $y \in \mathbb{R}$, por lo que es una contradicción.

En conclusión, no hay funciones que cumplan con las condiciones del problema. $\square$

Ecuación de Cauchy en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$

14 Hallar todas las funciones $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}, \text{ para todo } x,y\in\mathbb{Q}.$$

Solución. Reemplazando $y=0$, tenemos que

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{f(x)+f(0)}{2}. \tag{1}$$

Sustituyendo $x\to x+y$ en (1), obtenemos que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right)&=\frac{f(x+y)+f(0)}{2}\\ \frac{f(x)+f(y)}{2}&=\frac{f(x+y)+f(0)}{2}\\ \Rightarrow\quad f(x)+f(y)&=f(x+y)+f(0). \end{aligned} \tag{2}$$

Ahora, definimos la función $g(x)=f(x)-f(0)$. Luego, al reemplazar en (2), resulta que

$$\begin{aligned} g(x)+f(0)+g(y)+f(0)&=g(x+y)+f(0)+f(0)\\ \Rightarrow\quad g(x)+g(y)&=g(x+y), \end{aligned}$$

para todo $x,y\in\mathbb{Q}$. Por lo tanto, como g satisface Cauchy, tenemos que $g(x)=ax$ con $a\in\mathbb{Q}$ constante. En consecuencia, si denotamos $b=f(0)$, las soluciones de la ecuación funcional son de la forma $f(x)=ax+b$ con a y b en $\mathbb{Q}$. Podemos verificar fácilmente que todas estas funciones satisfacen las condiciones del problema. $\square$

15 Hallar todas las funciones $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica:

$$f(x+f(y))=f(x)-y.$$

[España, 2004]

Solución. Al tomar $x=0$, tenemos que

$$f(f(y))=f(0)-y. \tag{1}$$

De (1), podemos observar que f es inyectiva. En efecto, si $f(x)=f(y)$, entonces

$$\begin{aligned} f(f(x))&=f(f(y))\\ f(0)-x&=f(0)-y\\ \Rightarrow\quad x&=y. \end{aligned}$$

Ahora, al hacer $y=0$ en (1), resulta que

$$f(f(0))=f(0)\quad\Rightarrow\quad f(0)=0,$$

por la inyectividad de f.

Reemplazando este resultado en (1), tenemos que

$$f(f(y)) = -y. \tag{2}$$

Luego, al sustituir $y \to f(y)$ en (2), obtenemos que

$$\begin{aligned} f(f(f(y))) &= -f(y) \\ \Rightarrow \quad f(-y) &= -f(y), \end{aligned} \tag{3}$$

para todo $y \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, sustituyendo $x \to f(x)$ en la ecuación original y usando(2) y (3), resulta que

$$\begin{aligned} f(f(x) + f(y)) &= f(f(x)) - y \\ f(f(x) + f(y)) &= -x - y \\ f(f(f(x) + f(y))) &= f(-x - y) \\ -f(x) - f(y) &= -f(x + y) \\ \Rightarrow \quad f(x + y) &= f(x) + f(y). \end{aligned} \tag{4}$$

De (4), observamos que f cumple la ecuación de Cauchy, por lo que se cumple que $f(x) = f(1)x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Reemplazando esta información en (2), tenemos que

$$\begin{aligned} f(f(y)) &= -y \\ f(f(1)y) &= -y \\ f(1)f(1)y &= -y \\ \Rightarrow \quad f(1)^2 &= -1, \end{aligned}$$

lo que es imposible pues $f(1) \in \mathbb{Z}$. Finalmente no existe ninguna función que cumpla las condiciones del problema. □

Soluciones de los Problemas Adicionales

16 Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x, \text{ para todo número real } x \neq 0, 1.$$

Solución. Sustituyendo $x \to \dfrac{1}{1-x}$ en la ecuación funcional, tenemos que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}\right) &= \frac{1}{1-x} \\ f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{1}{-\frac{x}{1-x}}\right) &= \frac{1}{1-x} \\ f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) &= \frac{1}{1-x}. \end{aligned} \tag{1}$$

Asimismo, sustituyendo $x \to \dfrac{x-1}{x}$ en la ecuación inicial, tenemos que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}\right) &= \frac{x-1}{x} \\ f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) &= \frac{x-1}{x} \\ f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) &= \frac{x-1}{x}. \qquad (2) \end{aligned}$$

Luego, sumando la ecuación (2) y la ecuación funcional original, obtenemos que

$$2f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x + \frac{x-1}{x} = \frac{x^2+x-1}{x}.$$

Ahora, restando la ecuación (1) de está última ecuación, el resultado es

$$2f(x) = \frac{x^2+x-1}{x} - \frac{1}{1-x} = \frac{-x^3+x-1}{x(1-x)}.$$

En consecuencia,

$$f(x) = \frac{-x^3+x-1}{2x(1-x)}$$

es la solución de la ecuación funcional. □

17 Encontrar las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$xf(x) - yf(y) = (x-y)f(x+y), \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

[Irlanda, 1995]

Solución. Reemplazando $y = 1$ en la ecuación funcional, tenemos que

$$xf(x) - f(1) = (x-1)f(x+1) \qquad (1)$$

Además, al sustituir en la ecuación inicial $x \to x+1$ y tomar $y = -1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} (x+1)f(x+1) - (-1)f(-1) &= (x+1-(-1))f(x+1-1) \\ (x+1)f(x+1) + f(-1) &= (x+2)f(x). \qquad (2) \end{aligned}$$

Ahora, al sumar el resultado de multiplicar la ecuación (1) por $(x+1)$ y la ecuación (2) por $(x-1)$, el resultado es

$$\begin{aligned} &(x+1)xf(x) - (x+1)f(1) + (x-1)(x+1)f(x+1) + (x-1)f(-1) \\ &\qquad = (x+1)(x-1)f(x+1) + (x-1)(x+2)f(x) \\ &(x^2+x)f(x) - (x+1)f(1) + (x-1)f(-1) = (x^2+x-2)f(x) \\ &\qquad \Rightarrow \quad 2f(x) = (x+1)f(1) - (x-1)f(-1). \qquad (3) \end{aligned}$$

Por otro lado, si reemplazamos $x = 0$ en esta última ecuación, obtenemos que

$$2f(0) = f(1) + f(-1) \quad \Rightarrow \quad f(-1) = 2f(0) - f(1). \qquad (4)$$

Luego, al reemplazar el resultado (4) en la ecuación (3), tenemos que

$$\begin{aligned} 2f(x) &= (x+1)f(1) - (x-1)(2f(0) - f(1)) \\ 2f(x) &= (x+1+x-1)f(1) - 2(x-1)f(0) \\ 2f(x) &= 2xf(1) - 2(x-1)f(0) \\ f(x) &= xf(1) - (x-1)f(0) \\ \Rightarrow \qquad f(x) &= x(f(1) - f(0)) + f(0). \end{aligned}$$

Finalmente, definiendo $a = f(1) - f(0)$ y $b = f(0)$, resulta que las soluciones de la ecuación funcional son de la forma $f(x) = ax + b$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, las cuales efectivamente satisfacen. □

$\boxed{\textbf{18}}$ Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$m^2 + f(n) \quad | \quad mf(m) + n, \text{ para todos } n, m \in \mathbb{N}.$$

[Lista Corta IMO, 2014]

Solución. Reemplazando $m = 2$ y $n = 2$, tenemos que

$$\begin{aligned} 2^2 + f(2) \quad &| \quad 2f(2) + 2 \\ 4 + f(2) \quad &| \quad 2(4 + f(2)) - (2f(2) + 2) \\ 4 + f(2) \quad &| \quad 8 - 2 \\ \Rightarrow \qquad 4 + f(2) \quad &| \quad 6 \end{aligned}$$

Como $4 + f(2) > 4$, necesariamente $4 + f(2) = 6$, por lo que $f(2) = 2$.

Tomando solo que $m = 2$, tenemos que

$$\begin{aligned} 4 + f(n) \quad &| \quad 2f(2) + n \\ \Rightarrow \qquad 4 + f(n) \quad &| \quad 4 + n, \end{aligned}$$

entonces $4 + f(n) \leq 4 + n$, por lo que $f(n) \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, sustituyendo $m \to n$ en la condición, obtenemos que

$$n^2 + f(n) \quad | \quad nf(n) + n.$$

Luego,

$$\begin{aligned} n^2 + f(n) &\leq nf(n) + n \\ 0 &\leq nf(n) - f(n) + n - n^2 \\ 0 &\leq f(n)(n-1) - n(n-1) \\ \Rightarrow \qquad 0 &\leq (n-1)(f(n) - n), \end{aligned}$$

de modo que para $n \geq 2$, se cumple que $f(n) \geq n$. Además como $f(1) \geq 1$, tenemos que $f(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En consecuencia, $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la función identidad claramente cumple la condición. □

$\boxed{\textbf{19}}$ Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que satisfacen

(i) $f(xf(y))f(y) = f(x+y)$, para $x, y \geq 0$.

(ii) $f(2) = 0$.

(iii) $f(x) \neq 0$, para todo x tal que $0 \leq x < 2$.

[IMO, 1986]

Solución. Si $x \geq 2$, entonces $x - 2 \geq 0$. Luego, al sustituir $x \to x - 2$ y reemplazar $y = 2$ en la ecuación (i) y usando la condición (ii), tenemos que

$$\begin{aligned} f((x-2)f(2))f(2) &= f(x-2+2) \\ \Rightarrow \quad f(x) &= 0, \end{aligned}$$

para todo $x \geq 2$. Este resultado unido a la condición (iii) implica que $f(x) = 0$ si y solo si $x \geq 2$.

Ahora si $x < 2$, al sustituir $x \to 2 - x$ y $y = x$ en la condición (i), obtenemos que

$$\begin{aligned} f((2-x)f(x))f(x) &= f(2-x+x) \\ f((2-x)f(x))f(x) &= f(2) \\ \Rightarrow \quad f((2-x)f(x))f(x) &= 0, \end{aligned}$$

pero como $x < 2$, entonces $f(x) \neq 0$, lo que implica que $f((2-x)f(x)) = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} (2-x)f(x) &\geq 2 \\ \Rightarrow \quad f(x) &\geq \frac{2}{2-x}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora, sustituyendo $x \to \dfrac{2}{f(x)}$ y $y = x$, tenemos que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{f(x)}f(x)\right)f(x) &= f\left(\frac{2}{f(x)} + x\right) \\ f(2)f(x) &= f\left(\frac{2}{f(x)} + x\right) \\ \Rightarrow \quad f\left(\frac{2}{f(x)} + x\right) &= 0, \end{aligned}$$

entonces $\dfrac{2}{f(x)} + x \geq 2$, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{2}{f(x)} &\geq 2 - x \\ \Rightarrow \quad \frac{2}{2-x} &\geq f(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Finalmente, de (1) y (2), obtenemos que $f(x) = \dfrac{2}{2-x}$ para todo $x < 2$.

En conclusión, se puede verificar que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-x} & \text{para } 0 \leq x \leq 2, \\ \\ 0 & \text{para } x \geq 2, \end{cases}$$

es la única función que verifica las condiciones del problema. □

20 Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que,

$$f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n), \text{ para todos } m, n \in \mathbb{N}.$$

[Bielorusia, 2005]

Solución. Sustituyendo $m \to n$, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(n - n + f(n)) &= f(n) + f(n) \\ \Rightarrow \quad f(f(n)) &= 2f(n) \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, cuando $n = 1$ se cumple que

$$f(f(1)) = 2f(1). \tag{1}$$

Ahora, reemplazando $n = f(1)$ en la ecuación funcional original y usando (1), tenemos que

$$\begin{aligned} f(m - f(1) + f(f(1))) &= f(m) + f(f(1)) \\ f(m - f(1) + 2f(1)) &= f(m) + 2f(1) \\ \Rightarrow \quad f(m + f(1)) &= f(m) + 2f(1). \end{aligned} \tag{2}$$

Asimismo, sustituyendo $m \to m+1$ y reemplazando $n = 1$ en la ecuación funcional original y usando (1), tenemos que

$$\begin{aligned} f(m + 1 - 1 + f(1)) &= f(m+1) + f(1) \\ \Rightarrow \quad f(m + f(1)) &= f(m+1) + f(1). \end{aligned} \tag{3}$$

Igualando (2) y (3), resulta que

$$\begin{aligned} f(m+1) + f(1) &= f(m) + 2f(1) \\ \Rightarrow \quad f(m+1) &= f(m) + f(1). \end{aligned} \tag{4}$$

Este último resultado implica, por inducción, que $f(m) = mf(1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, para el caso base $n = 1$ es obviamente cierto. Ahora, supongamos que para m es cierto (hipótesis inductiva), entonces usando (4), resulta que

$$f(m+1) = f(m) + f(1) = mf(1) + f(1) = (m+1)f(1),$$

con lo que concluye la inducción.

Usando este resultado para $m = f(1)$, obtenemos que $f(f(1)) = f(1)f(1) = f(1)^2$, pero de (1) sabemos que $f(f(1)) = 2f(1)$, entonces

$$\begin{aligned} f(1)^2 &= 2f(1) \\ \Rightarrow \quad f(1) &= 2. \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando esto tenemos que $f(m) = 2m$ es la única solución de la ecuación funcional; además, es sencillo comprobar que verifica. □

21 Demostrar que no existen funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumplan

$$f(f(n)) = n + 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

[España, 2000]

Solución. Supongamos que existe una función f tal que $f(f(n)) = n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Al sustituir $n \to f(n)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(f(f(n))) &= f(n) + 1 \\ \Rightarrow \quad f(n+1) &= f(n) + 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Por inducción, probaremos que

$$f(n+1) = f(1) + n \tag{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. El caso base $n = 1$ es verdad por (1), pues $f(2) = f(1) + 1$. Ahora, supongamos que nuestra afirmación se cumple para n, entonces

$$f(n+2) = f(n+1+1) = f(n+1) + 1 = f(1) + n + 1,$$

es decir, también se verifica para $n + 1$, lo que concluye la inducción.

Ahora, reemplazando $n = 1$ en (1), resulta que

$$f(2) = f(1) + 1.$$

Luego aplicando f a ambos lados y usando la ecuación original y el resultado (2), tenemos que

$$\begin{aligned} f(f(2)) &= f(f(1) + 1) \\ 2 + 1 &= f(1) + f(1) \\ 3 &= 2f(1) \\ \Rightarrow \quad f(1) &= \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

lo que es absurdo pues $f(1) \in \mathbb{N}$. En conclusión, no existe ninguna función que cumpla la ecuación funcional. $\square$

22 Encontrar todas las funciones sobreyectivas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(f(x - y)) = f(x) - f(y), \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

Solución. Tomando $y = 0$, tenemos que

$$f(f(x)) = f(x) - f(0) \tag{1}$$

$f(f(x)) = f(x) - f(0)$. Como f es sobreyectiva, para todo $x \in \mathbb{R}$ existe z tal que $f(z) = x$. Sustituyendo $x \to z$, resulta que

$$\begin{aligned} f(f(z)) &= f(z) - f(0) \\ \Rightarrow \quad f(x) &= x - f(0). \end{aligned}$$

En este último resultado, al reemplazar $x = 0$, obtenemos que $f(0) = -f(0)$, es decir, $f(0) = 0$. Por lo tanto, $f(x) = x$ es la única solución de la ecuación funcional. $\square$

$\boxed{23}$ ¿Existe alguna función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n)$$

para todo $n \geq 2$?

[Bielorusia, 2000]

Solución. Supongamos que existe f que satisface con la ecuación funcional. De la ecuación dada, necesariamente se tiene que cumplir que $f(n+1) - f(n) > 0$ para todo $n \geq 2$, es decir, f es estrictamente creciente para $n \geq 2$. Luego, podemos demostrar por inducción que

$$f(n) \geq n - 1 \tag{1}$$

para todo $n \geq 2$. En efecto, el caso base $n = 2$ cumple. Ahora, supongamos que nuestra afirmación es cierta para n, entonces

$$f(n+1) > f(n) \geq n - 1 \quad \Rightarrow \quad f(n+1) \geq n,$$

lo que concluye nuestra inducción.

Asimismo, observando la ecuación funcional, tenemos que $f(f(n-1)) < f(n+1)$ para todo $n \geq 2$. Como $f(n)$ es creciente a partir de $n \geq 2$, tenemos dos casos:

- Si $f(n-1) \geq 2$, entonces $f(n-1) < n+1$.
- Si $f(n-1) = 1$, entonces $f(n-1) = 1 < n+1$.

En ambos casos, se cumple que $f(n-1) < n+1$, o equivalentemente

$$\begin{aligned} & f(n) < n+2 \\ \Rightarrow \quad & f(n) \leq n+1 \end{aligned} \tag{2}$$

para todo $n \geq 2$.

De (1) y (2), concluimos que

$$n - 1 \leq f(n) \leq n + 1 \tag{3}$$

para todo $n \geq 2$.

Usando el resultado (3) en la ecuación funcional original, tenemos que

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n) \leq n + 2 - (n-1) \leq 3. \tag{4}$$

Ahora, si en (4) reemplazamos $n = 7$, obtenemos que

$$f(f(6)) \leq 3. \tag{5}$$

Además, si en (3) reemplazamos $n = 6$ y usamos el hecho de que f es creciente, resulta que

$$\begin{aligned} & 5 \leq f(6) \\ \Rightarrow \quad & f(5) \leq f(f(6)), \end{aligned}$$

pero por (3), sabemos que $4 \leq f(5)$, es decir,

$$4 \leq f(f(6)),$$

lo que contradice (5). Finalmente, no existe un función f que cumpla las condiciones del problema. □

$\boxed{\textbf{24}}$ Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que

$$f(x+y) = x^2y + xy^2 - 2xy + f(x) + f(y), \text{ para } x, y \in \mathbb{Q}.$$

Solución. Definamos $g(x) = f(x) - \dfrac{x^3}{3} + x^2$. Luego, reemplazando en la ecuación funcional obtenemos que

$$\begin{aligned}
g(x+y) + \frac{(x+y)^3}{3} - (x+y)^2 &= x^2y + xy^2 - 2xy + g(x) + \frac{x^3}{3} - x^2 + g(y) + \frac{y^3}{3} - y^2 \\
g(x+y) + \frac{(x+y)^3}{3} - (x+y)^2 &= g(x) + g(y) + \frac{x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2}{3} - x^2 - y^2 - 2xy \\
g(x+y) + \frac{(x+y)^3}{3} - (x+y)^2 &= g(x) + g(y) + \frac{(x+y)^3}{3} - (x+y)^2 \\
\Rightarrow \quad g(x+y) &= g(x) + g(y), \qquad (1)
\end{aligned}$$

para todo $x, y \in \mathbb{Q}$. De (1), tenemos que g satisface la ecuación de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Por lo tanto, $g(x) = cx$ con $a \in \mathbb{Q}$ constante, de donde resulta que las soluciones de la ecuación funcional son de la forma

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + cx.$$

Además, es sencillo demostrar que estas funciones satisfacen el enunciado. □

$\boxed{\textbf{25}}$ Sean $r, s \in \mathbb{Q}$. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{Q}$ se cumple que

$$f(x + f(y)) = f(x + r) + y + s.$$

[Rumania, 2006]

Solución. Agregando $z - r$ a ambos lados de la ecuación funcional y aplicando f, tenemos que

$$\begin{aligned}
z - r + f(x + f(y)) &= f(x + r) + y + s + z - r \\
f(z - r + f(x + f(y))) &= f(y + s + z - r + f(x + r)) \\
f(z - r + r) + x + f(y) + s &= f(y + s + z - r + r) + x + r + s \\
\Rightarrow \quad f(y) + f(z) &= f(y + z + s) + r. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Definiendo $g(x) = f(x - s) - r$ y reemplazando en (1), obtenemos que

$$\begin{aligned}
g(y + s) + r + g(z + s) + r &= g(y + z + 2s) + r + r \\
\Rightarrow \quad g(y + s) + g(z + s) &= g(y + z + 2s). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Sustituyendo $y \to y - s$ y $z \to z - s$ en (2), resulta que

$$\begin{aligned}
g(y - s + s) + g(z - s + s) &= g(y - s + z - s + 2s) \\
\Rightarrow \quad g(y) + g(z) &= g(y + z),
\end{aligned}$$

para todo $y, z \in \mathbb{Q}$. Como g cumple Cauchy, tenemos que $g(x) = cx$, con $c \in \mathbb{Q}$ constante.

Luego, las soluciones tienen la forma $f(x-s)=cx+r$ o equivalentemente

$$f(x)=c(x+s)+r.$$

Al reemplazar está función en la ecuación funcional inicial, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x+f(y)) &= f(x+r)+y+s \\ f(x+c(y+s)+r) &= c(x+r+s)+r+y+s \\ c(x+c(y+s)+r+s)+r &= c(x+r+s)+r+y+s \\ c(x+r+s)+c^2(y+s) &= c(x+r+s)+y+s \\ c^2(y+s) &= y+s \\ \Rightarrow \quad (c^2-1)(y+s) &= 0, \end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{Q}$. En consecuencia, $c^2=1$, es decir, $c=\pm 1$. Finalmente, las únicas soluciones de la ecuación funcional son $f(x)=x+s+r$ y $f(x)=-x-s+r$. $\square$

María Huánuco Candia

matetoon@hotmail.com

Lima, 13 de febrero de 2016.