VI Taller de Olimpiadas Matemáticas para Profesores 2016

Ecuaciones Funcionales

María Huánuco Candia

1. Marco Teórico

En primer lugar, repasaremos un poco de teoría básica acerca de las funciones.

Definición 1.

*Una **función de** X **en** Y, que denotamos $f : X \to Y$, es una relación entre los elementos de los conjuntos X e Y, de tal forma que a cada elemento $x \in X$ le corresponde uno y solo un elemento $y \in Y$ y esta correspondencia se representa $f(x) = y$.*

Definición 2.

*En una función $f : X \to Y$, al conjunto X le llamamos **dominio** y definimos la **imagen** o **rango** como el conjunto de elementos y de Y para los cuales existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

A continuación, presentaremos algunas propiedades de las funciones. Estas nos servirán más adelante para resolver ecuaciones funcionales.

Definición 3.

*Una función $f : X \to Y$ es **inyectiva** cuando se cumple que si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$. Esto implica que valores distintos del dominio tienen imágenes distintas.*

Definición 4.

*Una función $f : X \to Y$ es **sobreyectiva** si el rango de f es Y, es decir, para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

Definición 5.

*Una función $f : X \to Y$ **biyectiva** es aquella que es inyectiva y sobreyectiva a la vez.*

Ahora, veamos algunas definiciones acerca del orden en las funciones.

Definición 6.

Una función $f : X \to Y$ *es* ***creciente****, si para todo* $x_1, x_2 \in X$ *tales que* $x_1 \leq x_2$ *se tiene que* $f(x_1) \leq f(x_2)$*. La función* f *será* ***estrictamente creciente****, si se cumple que* $x_1 < x_2$ *si y solo si* $f(x_1) < f(x_2)$*.*

Definición 7.

Una función $f : X \to Y$ *es* ***decreciente****, si para todo* $x_1, x_2 \in X$ *tales que* $x_1 \leq x_2$ *se tiene que* $f(x_1) \geq f(x_2)$*. La función* f *será* ***estrictamente decreciente****, si se cumple que* $x_1 < x_2$ *si y solo si que* $f(x_1) > f(x_2)$*.*

Definición 8.

Una función $f : X \to Y$ *es* ***monótona****, si es creciente o decreciente y es* ***estrictamente monótona****, si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*

2. Métodos Básicos para resolver Ecuaciones Funcionales

Un problema en el que se presente una ecuación funcional es aquel en el que nos piden encontrar todas las funciones que satisfagan con algunas condiciones dadas o también podrían pedirnos que hallemos el valor de esta función al ser evaluada en algún número. En esta sección, exploraremos algunos métodos que nos ayudarán a afrontar distintas clases de ecuaciones funcionales.

Observación.

- Siempre es útil, si la ecuación lo permite, estimar que funciones cumplen; por ejemplo, la función constante, identidad o lineal.
- Al llegar a una posible respuesta, siempre debemos verificar que efectivamente esa función cumple con la ecuación funcional.

2.1. Sustituir las variables por valores o por otras variables

Uno de los pasos iniciales para resolver ecuaciones funcionales es evaluar una o más variables en ciertos valores. Principalmente, se reemplazan valores constantes como 0 o 1. Otro paso principal es sustituir las variables por otras variables o composiciones de ellas; por ejemplo, podemos sustituir y por $-x$ o por $f(x)$. Es importante recalcar que las sustituciones se hacen menos obvias a medida que los problemas se vuelven más difíciles.

Este método es el más básico de todos, y por ende, se utiliza muchas veces junto a otras técnicas que veremos más adelante.

Problemas:

$\boxed{\mathbf{1}}$ Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x^2-y^2)=(x-y)(f(x)+f(y)) \text{ para todo } x,y\in\mathbb{R}.$$

[Korea, 2000]

$\boxed{\mathbf{2}}$ Encontrar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x+y)+xy=f(x)f(y), \text{ para todos } x,y\in\mathbb{R}.$$

[India, 2010]

$\boxed{\mathbf{3}}$ Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que, para cualesquiera x,y,u,v reales, se cumple

$$(f(x)+f(y))(f(u)+f(v))=f(xu-yv).$$

[IMO, 2002]

$\boxed{\mathbf{4}}$ Determinar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$f(x+f(x+y))+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x)$$

para todos los números reales x e y.

[IMO, 2015]

2.2. Inducción Matemática

El principio de inducción es muy usado en diversas áreas de la matemática. A continuación, la presentamos en dos versiones:

Principio de Inducción Matemática (Forma General)**.**

Una proposición es válida para todo natural $n\geq n_0$ con $n_0\in\mathbb{N}$, si

(i) La proposición es verdadera para $n_0\in\mathbb{N}$ y

(ii) La veracidad de la proposición para $n=k$ implica la veracidad para $n=k+1$.

Principio de Inducción Matemática (Forma Fuerte)**.**

Una proposición es válida para todo $n\in\mathbb{N}$, si

(i) La proposición es verdadera para $n=1$ y

(ii) La veracidad de la proposición para $n=1,2,\ldots,k$ implica la veracidad para $n=k+1$.

Para resolver ecuaciones funcionales con este método, podemos tratar de hallar $f(n)$ en función de $f(1)$. Otra opción es estimar que función es f, probarlo para un caso base y usar la inducción para demostrarlo en todos los naturales. Luego, dependiendo de cual sea nuestro dominio, podemos hallar el valor de $f(r)$ para $r\in\mathbb{Q}$. Esta técnica es muy útil cuando las funciones son definidas en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$.

Problemas:

$\boxed{5}$ Hallar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que satisfacen que $f(1) = 3$, $f(2) = 2$ y

$$f(n+2) + \frac{1}{f(n)} = 2, \text{ para todos } n \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{6}$ Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función con las siguientes propiedades:

(i) $f(2) = 2$.
(ii) $f(mn) = f(m)f(n)$, para cada m y n.
(iii) $f(m) > f(n)$, para $m > n$.

Demostrar que $f(n) = n$.

[Canadá, 1969]

$\boxed{7}$ Encontrar todas las funciones f que van de $\mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ en si mismo, que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $f(x+1) = f(x) + 1$, para todo $x \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$.
(ii) $f(x^2) = f(x)^2$, para todo $x \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$

[Ucrania, 1997]

2.3. Considerar propiedades de las funciones

Investigar la inyectividad o sobreyectividad de las funciones que verifican una ecuación funcional es importante para simplificarla. En muchos problemas, no es difícil probar que una función es inyectiva o sobreyectiva, pero puede ser de gran utilidad.

Por un lado, en el caso de que nuestra función sea inyectiva, podemos usar este hecho, buscando una igualdad de la forma $f(A) = f(B)$, donde A y B pueden ser valores o expresiones, para concluir que $A = B$.

Por el otro lado, en el caso de que la función sea sobreyectiva, podemos darle a $f(x)$ lo valores que nosotros queramos o necesitemos para simplificar nuestra ecuación.

Problemas:

$\boxed{8}$ Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función que cumple que

$$f(f(m) + f(n)) = m + n, \text{ para todos } m, n.$$

Encontrar todos los posibles valores de $f(1988)$

[Lista Corta IMO, 1988]

$\boxed{9}$ Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x), \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

[Lista Corta IMO, 2002]

2.4. Monotonía

Indagar respecto a si la función que queremos hallar es monótona nos servirá para ordenar o acotar los posibles valores que tome.

Un resultado importante que tenemos que tener presente es que si una función es estrictamente monótona, entonces es inyectiva. En efecto, supongamos sin perdida de generalidad que f es estrictamente creciente. Ahora, si se cumple que $f(x) = f(y)$, no puede ser $x > y$, pues en ese caso $f(x) > f(y)$. Análogamente, no puede darse $x < y$. En consecuencia, se cumple que $x = y$, lo que demuestra la inyectividad de f.

Problemas:

10 Encontrar todas las funciones estrictamente crecientes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfacen

$$f(nf(m)) = m^2 f(nm), \text{ para todos } n, m \in \mathbb{N}.$$

[OIM, 1993]

11 Hallar todas las funciones estrictamente monótonas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \text{ para } x, y \in \mathbb{R}.$$

[Italia, 1999]

2.5. Definición de nuevas funciones

Definir una función como resultado de aplicar una operación o transformación sobre la función que nos piden hallar, nos sirve muchas veces para simplificar la ecuación funcional dada. De modo que la función definida satisface un ecuación más simple, por lo que al hallar la solución de esta, estaremos hallando indirectamente una solución de nuestra ecuación original, pues ambas funciones están relacionadas.

Problemas:

12 Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x^2) - f(y^2) = (x + y)(f(x) - f(y)), \text{ para } x, y \in \mathbb{R}.$$

13 Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x - f(y)) = x + y - f(x), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

2.6. Ecuación de Cauchy en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$

Aquí veremos que sucede cuando una función definida en general en $\mathbb{Q}$ satisface la ecuación de Cauchy:

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Para ver cuales son las funciones que satisfacen (1), procederemos de forma ordena a hallar los valores de f en $\mathbb{N}$, luego en $\mathbb{Z}$ y finalmente en $\mathbb{Q}$.

Notemos que si sustituimos y por x, tendríamos que $f(2x) = 2f(x)$, a partir de esto podemos conjeturar que

$$f(nx) = nf(x) \tag{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos a probar que esto es cierto por inducción. En efecto, el caso base $n = 1$ cumple. Ahora, supongamos que es verdad para n (hipótesis inductiva), entonces

$$f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x),$$

por lo que nuestra afirmación también se verifica para $n+1$ con lo que concluye nuestra inducción.

Ahora, si reemplazamos $x = 1$ en (2), tenemos que

$$f(n) = nf(1), \tag{3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir que si nuestro dominio fuera $\mathbb{N}$ ya tendríamos resuelta nuestra ecuación.

Por otro lado, si el dominio es $\mathbb{Z}$, es válido reemplazar $x = 0$ y $y = 0$ en (1), de donde

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0.$$

Luego, si sustituimos y por $-x$ en (1), resulta que

$$f(0) = f(x) + f(-x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = -f(-x)$$

y en consecuencia, si $x \in \mathbb{Z}$ es tal que $x < 0$, entonces

$$f(x) = -f(-x) = -(-x)f(1) = xf(1),$$

pues $-x \in \mathbb{N}$. Estos resultados implican que

$$f(x) = xf(1), \tag{4}$$

para todo $x \in \mathbb{Z}$.

Finalmente, si el dominio es $\mathbb{Q}$, tomamos $x = \dfrac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ y usando (2) y (4), obtenemos que

$$pf(1) = f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right) \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1).$$

En conclusión, $f(x) = xf(1)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Hemos demostrado que si una función con dominio en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$ cumple la ecuación de Cauchy, entonces la función tiene la forma $f(x) = cx$, para algún c constante en el dominio.

Problemas:

14 Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{Q}.$$

15 Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica:

$$f(x + f(y)) = f(x) - y.$$

[España, 2004]

3. Problemas Adicionales

16 Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x, \text{ para todo número real } x \neq 0, 1.$$

17 Encontrar las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y), \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

[Irlanda, 1995]

18 Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$m^2 + f(n) \quad | \quad mf(m) + n, \text{ para todos } n, m \in \mathbb{N}.$$

[Lista Corta IMO, 2014]

19 Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ que satisfacen

(i) $f(xf(y))f(y) = f(x + y)$, para $x, y \geq 0$.

(ii) $f(2) = 0$.

(iii) $f(x) \neq 0$, para todo x tal que $0 \leq x < 2$.

[IMO, 1986]

20 Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que,

$$f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n), \text{ para todos } m, n \in \mathbb{N}.$$

[Bielorusia, 2005]

21 Demostrar que no existen funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumplan

$$f(f(n)) = n + 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

[España, 2000]

$\boxed{\mathbf{22}}$ Encontrar todas las funciones sobreyectivas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(f(x-y)) = f(x) - f(y), \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\mathbf{23}}$ ¿Existe alguna función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n)$$

para todo $n \geq 2$?

[Bielorusia, 2000]

$\boxed{\mathbf{24}}$ Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que

$$f(x+y) = x^2y + xy^2 - 2xy + f(x) + f(y), \text{ para } x, y \in \mathbb{Q}.$$

$\boxed{\mathbf{25}}$ Sean $r, s \in \mathbb{Q}$. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que

$$f(x + f(y)) = f(x + r) + y + s, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{Q}.$$

[Rumania, 2006]

María Huánuco Candia

matetoon@gmail.com

Lima, 13 de febrero de 2016.

Editorial
Binaria