IV Taller de Olimpiadas Matemáticas para Profesores 2014

Polinomios

Jorge Tipe Villanueva

1. Polinomios

Un polinomio es una expresión de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

donde los números a_i son complejos.

A partir de ahora, cuando hablemos de «un polinomio» nos referimos a uno de coeficientes complejos, salvo se indique otra cosa. También asumiremos que se conocen las operaciones básicas entre polinomios: suma, resta y multiplicación.

Definición. Si $a_n \neq 0$ decimos que el grado del polinomio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ es n. Denotamos por $gra(P)$ al grado del polinomio $P(x)$.

Observación.

- Note que para que este definido el grado de un polinomio necesitamos al menos un término no nulo. Sea $P(x) = k$ un polinomio constante, si $k \neq 0$ entonces el grado de $P(x)$ es 0. Si $k = 0$, es decir, si el polinomio es nulo decimos por convención que su grado es $-\infty$. Esto es para que la siguiente propiedad sea válida para cualesquiera polinomios $P(x)$ y $Q(x)$:

$$gra(P \cdot Q) = gra(P) + gra(Q).$$

- Si trabajamos con la suma de dos polinomios, obtenemos la siguiente propiedad:

$$gra(P + Q) \leq \max\{gra(P), gra(Q)\}$$

Evaluación de un polinomio.

Un polinomio $P(x)$ tiene asociada una función polinomial que a cada número complejo r le asocia el número $P(r)$ que resulta de reemplazar x por r en la expresión de $P(x)$ y hacer las operaciones de suma, potencia, producto, etc:

$$P(r) = a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0.$$

Dos polinomios son idénticos si tienen los mismos coeficientes en términos de igual exponente. Naturalmente, si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios idénticos se cumple que $P(r) = Q(r)$, para todo número complejo r.

Problema 1. Los polinomios mostrados son idénticos:

$$(x^{1000} + x^{1001} + 2)^{1002} = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

Determine el valor de $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \cdots$.

Solución. Como tenemos una identidad de polinomios podemos evaluar en cualquier número complejo y obtendremos una igualdad. Si evaluamos en $x = 1$ obtenemos:

$$4^{1002} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots .$$

Si ahora evaluamos en $x = -1$ obtenemos:

$$2^{1002} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$$

Al sumar las dos ecuaciones obtenemos:

$$4^{1002} + 2^{1002} = 2a_0 + 2a_2 + 2a_4 + \cdots .$$

En consecuencia, la suma pedida es igual a $2^{2003} + 2^{1001}$.

Problema 2. Sea $Q(x)$ un polinomio, a y b números reales tales que:

$$x^{20} + 3x^{11} + 6 = (x^2 + 1) \cdot P(x) + ax + b,$$

halle los valores de a y b.

Solución. Evaluamos en $x = i$ (unidad imaginaria) y obtenemos:

$$1 - 3i + 6 = 0 \cdot P(i) + ai + b \quad \Longrightarrow \quad ai + b = 7 - 3i,$$

como a y b son reales, concluimos que $a = -3$ y $b = 7$.

2. Raíces de un polinomio y Teorema Fundamental del Álgebra

Sea $P(x)$ un polinomio y r un número complejo. Decimos que r es una raíz de $P(x)$ si $P(r) = 0$.

Teorema Fundamental del Álgebra. Sea n un entero no negativo. Un polinomio de coeficientes complejos y grado n tiene exactamente n raíces complejas (puede haber raíces múltiples).

Corolario. Un polinomio no nulo tiene un número finito de raíces, o dicho de otra forma: Si un polinomio tiene infinitas raíces entonces es el polinomio nulo.

Problema 3. Un polinomio cumple que

$$P(1) = P(2) = P(3) = \cdots = P(n) = \cdots$$

¿qué tipo de polinomio es $P(x)$?

Solución. Sea k un complejo tal que $k = P(1) = P(2) = P(3) = \cdots = P(n) = \cdots$. Definimos el polinomio $Q(x) = P(x) - k$, entonces $Q(n) = P(n) - k = 0$, para todo entero positivo n. Es decir, todos los enteros positivos son raíces de $Q(x)$.

Problema 4. Un polinomio de coeficientes reales cumple que

$$P(1)^2 = P(2)^2 = P(3)^2 = \cdots = P(n)^2 = \cdots$$

¿qué tipo de polinomio es $P(x)$?

Problema 5. ¿Qué polinomios de coeficientes reales son periódicos? Es decir, para que polinomios $P(x)$ de coeficientes reales existe un número T (llamado periodo) tal que $P(x+T) = P(x)$, para todo x.

Solución. Tenemos que $P(0) = P(T) = P(2T) = P(3T) = \cdots$, con el mismo proceso que hicimos en el Problema 3, demostramos que $P(x)$ es constante.

Problema 6. Se sabe que existe un polinomio $P(x)$ de coeficientes reales tal que, para todo entero positivo n, se cumple que:

$$1^{100} + 2^{100} + 3^{100} + \cdots + n^{100} = P(n).$$

Para dicho polinomio $P(x)$, calcula los valores numéricos de $P(0)$, $P(-1)$ y $P(-2)$.

Solución. Notemos que:

$$P(n+1) = P(n) + (n+1)^{100}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \tag{1}$$

Si definimos el polinomio

$$Q(x) = P(x+1) - P(x) - (x+1)^{100},$$

por (1), tenemos que $Q(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, es decir, el polinomio $Q(x)$ tendría infinitas raíces, y esto es posible solamente si $Q(x)$ es el polinomio nulo. En particular tendríamos que $Q(x) = 0$ para todo x real, en consecuencia:

$$P(x) = P(x+1) - (x+1)^{100}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Haciendo $x = 0$:

$$P(0) = P(1) - 1^{100} = 1 - 1 = 0.$$

Haciendo $x = -1$:

$$P(-1) = P(0) - 0^{100} = 0.$$

Haciendo $x = -2$:

$$P(-2) = P(-1) - (-1)^{100} = 0 - 1 = -1.$$

Hemos demostrado que $P(0) = P(-1) = 0$ y $P(-2) = -1$.

3. Algoritmo de la división y Divisibilidad de Polinomios

Algoritmo de la división. Dados los polinomios $A(x)$ y $B(x)$ (no nulo), existen los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

y además $gra(R) < gra(B)$.

Observaciones.

- Se puede demostrar que los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ son únicos.
- El polinomio $Q(x)$ es llamado cociente y $R(x)$ es el resto.
- Si $A(x)$ y $B(x)$ son de coeficientes reales entonces $Q(x)$ y $R(x)$ también lo son.
- Si $A(x)$ y $B(x)$ son de coeficientes racionales $Q(x)$ y $R(x)$ también lo son.
- Si $A(x)$ y $B(x)$ son de coeficientes enteros y $B(x)$ es mónico, entonces $Q(x)$ y $R(x)$ también son de coeficientes enteros.

Definición. Decimos que el polinomio $A(x)$ divide al polinomio $B(x)$ si existe un polinomio $Q(x)$ tal que $A(x) \cdot Q(x) = B(x)$. También se puede decir que $B(x)$ es divisible por el polinomio $A(x)$, o que $A(x)$ es un factor de $B(x)$.

Teorema del resto. El resto de dividir $P(x)$ entre $(x - a)$ es $P(a)$.

Prueba. Como el divisor es de grado 1, el resto es una constante, luego:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + k,$$

donde k es el resto. Al considerar $x = a$ obtenemos $P(a) = k$, es decir, el resto k es igual a $P(x)$.

Corolario. Si r es raíz del polinomio $P(x)$ entonces $(x - r)$ es un factor de $P(x)$.

Problema 7. Sean a y b números reales diferentes. Suponga que los polinomios $(x - a)$ y $(x - b)$ son ambos factores de $P(x)$. Demuestre que $P(x)$ es divisible por $(x - a)(x - b)$.

Prueba. Como $P(x)$ es divisible por $(x - a)$, existe un polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$. Como $P(x)$ es divisible por $(x - b)$ entonces $P(b) = 0$, luego, al hacer $x = b$ en la ecuación $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$ obtenemos:

$$0 = (b - a) \cdot Q(b),$$

y como $a \neq b$ concluimos que $Q(b) = 0$, es decir, el polinomio $Q(x)$ es divisible por $(x - b)$. Existe un polinomio $T(x)$ tal que $Q(x) = (x - b) \cdot T(x)$. Al reemplazar obtenemos:

$$P(x) = (x - a)(x - b) \cdot T(x),$$

con lo cual concluimos que $P(x)$ es divisible por $(x - a)(x - b)$.

Problema 8. Hallar todos los enteros positivos n para los cuales el polinomio $x^n + 1$ es divisible por el polinomio $x^2 + 1$.

Solución. Para que sea divisible debe existir un polinomio $P(x)$ tal que $x^n+1 = (x^2+1) \cdot P(x)$. Haciendo $x = i$ obtenemos que $i^n + 1 = 0$, y esto implica que $n = 4k + 2$, para algún entero k. Ahora, si $n = 4k + 2$ el polinomio $x^{4k+2} + 1$ sí es divisible por $x^2 + 1$, para emostrar esto, podemos usar cocientes notables.

Problema 9. Halle todos los enteros positivos n para los cuales $x^n - 1$ es divisible por $x^2 + x + 1$.

Problema 10. Al dividir el polinomio $(x+7)^{100}$ entre el polinomio x^2-x-1 se obtuvo como resto el polinomio $P(x)$. Calcula el resto de dividir $P(2)$ entre 11.

Solución. Sabemos que $P(x)$ es de la forma $ax+b$. Luego, por el algoritmo de la división existe un polinomio $Q(x)$ de coeficientes enteros tal que

$$(x+7)^{100} = (x^2-x-1)Q(x) + ax + b.$$

Igualando $x^2-x-1=11$ tenemos que $x^2-x-12=(x-4)(x+3)=0$, por eso evaluaremos x en 4 y -3.

Para $x=4$ obtenemos:

$$\begin{aligned} (4+7)^{100} &= (4^2-4-1)Q(4) + 4a + b \\ 11^{100} &= 11\ Q(4) + 4a + b \\ 4a + b &\equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned} \tag{1}$$

Para $x=-3$, obtenemos:

$$\begin{aligned} ((-3)+7)^{100} &= ((-3)^2-(-3)-1)Q(-3) + (-3)a + b \\ 4^{100} &= 11\ Q(-3) + b - 3a \\ b - 3a &\equiv 4^{100} \pmod{11}. \end{aligned}$$

Como $4^{10} = 1024 \equiv 1 \pmod{11}$ entonces $4^{100} = (4^{10})^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, luego:

$$b - 3a \equiv 1 \pmod{11}. \tag{2}$$

De (1) y (2) obtenemos

$$(4a+b) - (b-3a) \equiv 0 - 1 \equiv -1 \pmod{11},$$

luego,

$$7a \equiv -1 \pmod{11} \implies a \equiv 3 \pmod{11}.$$

Reemplazando en (1) obtenemos

$$b \equiv -4(3) \equiv -1 \pmod{11}.$$

Finalmente,

$$P(2) = 2a + b \equiv 2(3) + (-1) \equiv 5 \pmod{11}.$$

Problema 11. Determine todos los polinomios f de grado 3 tales que:

- $f(x)+2$ es divisible por $(x-1)^2$.
- $f(x)-2$ es divisible por $(x+1)^2$.

Solución. Existe un polinomio $P(x)$ tal que $f(x)+2 = P(x)\cdot(x-1)^2$, cambiando x por $-x$ obtenemos $f(-x)+2 = P(x)\cdot(x+1)^2$. Es decir, el polinomio $f(-x)+2$ es divisible por el polinomio $(x+1)^2$ al igual que el polinomio $f(x)-2$. Luego, la suma de ellos también es divisible por $(x+1)^2$. Sea $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, entonces $[f(-x)+2]+[f(x)-2] = 2bx^2+2d$ es divisible por $(x+1)^2$. De lo último es fácil concluir que $b=d=0$, luego, $f(x)+2 = ax^3+cx+2$ es divisible por $(x-1)^2$. El cociente es un polinomio de grado 2, de coeficiente principal a y término independiente 2, es decir:

$$ax^3+cx+2 = (x-1)^2\cdot(ax+2).$$

Al desarrollar obtenemos que $a=1$ y $c=-3$.

Problema 12. Determine el resto de dividir el polinomio $x^{30}-x^{28}+7x^{12}$ entre el polinomio x^2+x+1.

4. Ecuaciones de Cardano Viete

El teorema fundamental del álgebra nos dice que toda ecuación polinomial de grado $n > 0$ tiene exactamente n raíces (puede haber raíces repetidas). No demostraremos este teorema pues exige de bastantes preliminares.

Consideremos la siguiente ecuación polinomial de grado n:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Por el teorema fundamental del álgebra existen exactamente n números, en general complejos, que son raíces de esta ecuación, digamos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ahora consideremos la siguiente ecuación polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 - a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = 0.$$

Claramente tiene como raíces a los n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y sin embargo el grado de esta ecuación es menor que n pues los términos de mayor grado se anulan. Aparentemente esto contradiría el teorema fundamental a menos que esta ecuación tenga grado cero y por tanto el polinomio involucrado sea idénticamente nulo. Esto quiere decir que tenemos la siguiente identidad de polinomios

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

Igualando coeficiente a coeficiente obtenemos las siguiente propiedades para las raíces de la ecuación original:

Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

Suma de raíces tomadas de dos en dos:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

Suma de raíces tomadas de tres en tres

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \frac{-a_{n-3}}{a_n}$$

Así de forma análoga vamos intercambiando los signos hasta tener finalmente el producto de raíces:

$$x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Estas fórmulas se conocen como Fórmulas de Cardano-Viete.

Problema 13. Sean α, β, y γ las raíces de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$. Halla el valor de

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}.$$

Solución. Notamos que $\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha} = 1 + \dfrac{2\alpha}{1-\alpha}$, hacemos lo mismo con β y γ, para obtener:

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}=\frac{2\alpha}{1-\alpha}+\frac{2\beta}{1-\beta}+\frac{2\gamma}{1-\gamma}+3$$

Como α es raíz de la ecuación, se cumple que $\alpha^3-\alpha-1=0$, entonces:

$$\alpha^3-1=\alpha$$

$$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=\alpha$$

$$(\alpha^2+\alpha+1)=\frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Luego tenemos que

$$\frac{2\alpha}{1-\alpha}=-2\alpha^2-2\alpha-2,$$

y haciendo lo mismo para β y γ:

$$\begin{aligned}\frac{2\alpha}{1-\alpha}+\frac{2\beta}{1-\beta}+\frac{2\gamma}{1-\gamma}+3&=-2\alpha^2-2\alpha-2-2\beta^2-2\beta-2-2\gamma^2-2\gamma-2+3\\&=-2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2(\alpha+\beta+\gamma)-3 \qquad (2)\end{aligned}$$

Ahora aplicaremos el Teorema de Cardano-Viete. De la ecuación, tenemos que:

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=0,\\ \alpha\beta+\gamma\beta+\alpha\gamma&=-1 \qquad (3)\end{aligned}$$

Como $(\alpha+\beta+\gamma)^2=0$, entonces:

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\gamma\beta+\alpha\gamma)&=0\\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(-1)&=0\\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=2 \qquad (4)\end{aligned}$$

Reemplazando (3) y (4) en (2):

$$\frac{2\alpha}{1-\alpha}+\frac{2\beta}{1-\beta}+\frac{2\gamma}{1-\gamma}+3=-2(2)-2(0)-3=-7,$$

luego:

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}=-7$$

Problema 14. Sean p, q, r las raíces de la ecuación $7x^3-x^2-1=0$, determine el valor de $\frac{1-p}{1+p}+\frac{1-q}{1+q}+\frac{1-r}{1+r}$.

Problema 15. Si a, b, c, d son las raíces de la ecuación $x^4-3x^3+1=0$, calcula $\dfrac{1}{a^6}+\dfrac{1}{b^6}+\dfrac{1}{c^6}+\dfrac{1}{d^6}$.

Solución. Como a es una raíz de la ecuación dada, entonces $a^4-3a^3+1=0$, de donde:

$$\frac{1}{a^3}=3-a.$$

Ahora, para conseguir $\dfrac{1}{a^6}$, elevamos la ecuación anterior al cuadrado

$$\frac{1}{a^6}=(3-a)^2,$$

y obtendremos ecuaciones similares para las raíces b, c y d. Al sumar estas nuevas ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^6}+\frac{1}{b^6}+\frac{1}{c^6}+\frac{1}{d^6} &= (3-a)^2+(3-b)^2+(3-c)^2+(3-d)^2\\ &= 36+(a^2+b^2+c^2+d^2)-6(a+b+c+d). \qquad (1)\end{aligned}$$

Por las fórmulas de Cardano, aplicadas a la ecuación $x^4-3x^3+1=0$, obtenemos

$$\begin{aligned}a+b+c+d &= 3\\ ab+ac+ad+bc+bd+cd &= 0,\end{aligned}$$

y además, usando la identidad

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd),$$

concluimos que $a^2+b^2+c^2+d^2=9$.

Finalmente, reemplazando los valores obtenidos en (1), obtenemos:

$$\frac{1}{a^6}+\frac{1}{b^6}+\frac{1}{c^6}+\frac{1}{d^6} = 36+9-6\times 3 = 27.$$

Problema 16. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las raíces de la ecuación polinomial

$$x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1=0.$$

Pruebe que

$$\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+\cdots+\frac{1}{1-x_n}=\frac{n}{2}.$$

5. Polinomios en ecuaciones funcionales

Problema 17. Hallar todos los polinomios $P(x)$ tales que $P(2x)=P(x)$.

Solución. Sea $a=P(1)=P(2)=P(4)=P(8)=\cdots$, en general tenemos que $a=P(2^n)$ para todo entero no negativo n. Definimos el polinomio $Q(X)=P(x)-a$, entonces todos los números de la forma 2^n son raíces de $Q(x)$, esto implica que $Q(x)$ es el polinomio nulo, con lo cual tendríamos que $P(x)=a$, es decir, el polinomio $P(x)$ es constante.

Problema 18. Hallar todos los polinomios $P(x)$ tales que

$$(x-16)P(2x)=16(x-1)P(x).$$

Solución. Como tenemos una identidad, hacemos $x=1$ y obtenemos que $P(2)=0$; y si hacemos $x=16$ obtenemos que $P(16)=0$. Por lo tanto, 2 y 16 son raíces de $P(x)$, luego, existe un polinomio $Q(x)$ tal que

$$P(x)=(x-2)(x-16)Q(x).$$

Al reemplazar en la condición inicial obtenemos:

$$(x-8)Q(2x)=4(x-2)Q(x). \qquad (1)$$

Haciendo $x=2$ obtenemos que $Q(4)=0$; y haciendo $x=8$ obtenemos que $Q(8)=0$. Por lo tanto, 4 y 8 son raíces de $Q(x)$, luego, existe un polinomio $R(x)$ tal que

$$Q(x)=(x-4)(x-8)R(x).$$

Al reemplazar en (1) obtenemos $R(2x) = R(x)$, que por el problema anterior ya sabemos que $R(x)$ tiene que ser constante (de hecho, cualquier polinomio constante cumple esa condición). Con lo anterior concluimos que $Q(x) = k(x-4)(x-8)$ y en consecuencia

$$P(x) = k(x-2)(x-4)(x-8)(x-16),$$

donde k es cualquier constante.

Problema 19. ¿Cuántos polinomios $p(x)$ de grado mayor o igual que 1 y de coeficentes enteros cumplen la condición $16p(x^2) = [p(2x)]^2$, para todo número real x?

Solución. Sea n el grado del polinomio y sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, entonces

$$\begin{aligned} p(x^2) &= a_n x^{2n} + a_{n-1}x^{2n-2} + \cdots + a_1 x^2 + a_0, \text{ y} \\ p(2x) &= 2^n a_n x^n + 2^{n-1}a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + 2a_1 + a_0. \end{aligned}$$

En la igualdad $16p(x^2) = [p(2x)]^2$, los coeficientes principales tienen que ser iguales:

$$\begin{aligned} 16p(x^2) &= 16a_n x^{2n} + \ldots \\ [p(2x)]^2 &= 2^{2n}a_n^2 x^{2n} + \ldots \end{aligned}$$

entonces

$$16a_n = 2^{2n}a_n^2 \quad \Longrightarrow \quad 2^{2n}a_n = 16,$$

donde las únicas soluciones son $n = 1$ ó $n = 2$, pues a_n es entero.

- Primer Caso: $n = 1$, esto implica que $a_n = a_1 = 4$. Luego el polinomio $p(x)$ es lineal y tenemos que $p(x) = 4x + a_0$. Reemplazando en la identidad inicial obtenemos

  $$16(4x^2 + a_0) = (8x + a_0)^2 \Rightarrow 64x^2 + 0x + 16a_0 = 64x^2 + 16a_0 x + a_0^2,$$

  como ambos polinomios son idénticos tenemos que $16a_0 = 0$ y por ende $a_0 = 0$. En este caso concluimos que $p(x) = 4x$, que es solución pues satisface la identidad inicial.

- Segundo Caso: $n = 2$, esto implica que $a_n = a_2 = 1$, luego $p(x)$ es un polinomio cuadrático de la forma $p(x) = x^2 + a_1 x + a_0$. Reemplazando en la identidad inicial tenemos

  $$\begin{aligned} & 16(x^4 + a_1x^2 + a_0) = (4x^2 + 2a_1 x + a_0)^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & 16x^4 + 16a_1x^2 + 16a_0 = 16x^4 + 16a_1x^3 + (4a_1^2 + 8a_0)x^2 + 4a_1a_0x + a_0^2 \\ \Longleftrightarrow \quad & 0x^3 + 16a_1x^2 + 0x + 16a_0 = 16a_1x^3 + (4a_1^2 + 8a_0)x^2 + 4a_1a_0x + a_0^2, \end{aligned}$$

  por ser polinomios idénticos los coeficientes respectivos son iguales, luego $16a_1 = 0$ de donde $a_1 = 0$ y además $4a_1^2 + 8a_0 = 16a_1$ de donde $a_0 = 0$. En este caso $p(x) = x^2$, que claramente satisface la igualdad inicial.

Finalmente $p(x) = 4x$ y $p(x) = x^2$ son los únicos polinomios que cumplen la condición del problema.

Problema 20. Hallar todos los polinomios $P(x)$ tales que $P(x^2) = [P(x)]^2$.

Solución. Podemos comprobar que α es raíz de $P(x)$ si y sólo si α^2 es raíz de $P(x)$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$. Sea $r \in \mathbb{C}$ una raíz no nula de $P(x)$, entonces $r^2, r^4, r^8, r^{16}, \ldots$ también son raíces.

Si $|r| > 1$ entonces todos los números anteriores serían diferentes porque sus módulos van aumentando, lo cual implicará que el polinomio tiene infinitas raíces; y pasaría algo similar si $|r| < 1$. Por lo tanto, concluimos que $|r| = 1$. Sea $r = e^{i\theta}$, con $0 \leq \theta < 2\pi$, por la propiedad enunciada al inicio, tendríamos que todos los siguientes números también son raíces de $P(x)$: $e^{i\frac{\theta}{2}}, e^{i\frac{\theta}{4}}, e^{i\frac{\theta}{8}}, \dots$. Si $\theta > 0$ el polinomio tendría infinitas raíces, en cambio si $\theta = 0$ tendríamos que $r = 1$. Es decir la única raíz no nula puede ser el 1. Pero si 1 es raíz entonces -1 también es raíz, lo cual sería una contradicción.

Finalmente, concluimos que hay dos posibilidades: El polinomio tiene infinitas raíces, o el polinomio no tiene raíces no nulas. En el primer caso es el polinomio nulo y en el segundo caso el polinomio es $P(x) = x^m$, que claramente cumple la condición.

6. Problemas propuestos

1. Sea $P(x)$ un polinomio tal que:

$$x \cdot P(x+1) = P(x^2+1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   a) Si $P(3) = 2$, halla el valor de $P(5)$.
   b) ¿Existe un polinomio que satisface todas estas condiciones?

2. Sea $P(x)$ un polinomio mónico y de grado n, tal que $P(i) = i$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Si $P(n+1) = 126$, calcula el valor de n.

3. Sea $P(x)$ un polinomio cuadrático de coeficientes reales, tal que:

$$x^2 - 2x + 2 \leq P(x) \leq 2x^2 - 4x + 3,$$

   para todo número real x. Suponga que $P(11) = 181$, calcula $P(16)$.

4. Sea $f(x) = (x^{1958} + x^{1957} + 2)^{1959} = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Determine el valor de

$$a_0 - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} + a_3 - \frac{a_4}{2} - \frac{a_5}{2} + a_6 - \cdots$$

5. Sean r_1, r_2, r_3 las raíces de la ecuación $x^3 + 3x + 1 = 0$, determine el valor de

$$(r_1^2 + r_1 + 1)(r_2^2 + r_2 + 1)(r_3^2 + r_3 + 1).$$

6. Determine todos los polinomios f de grado 5 tal que:
   - $f(x) + 1$ es divisible por $(x-1)^3$.
   - $f(x) - 1$ es divisible por $(x+1)^3$.

7. Determine el resto de dividir $x^{1959} - 1$ entre $(x^2+1)(x^2+x+1)$.

8. Sean a, b, c las raíces de la ecuación $x^3 + 3x^2 + 5x + 7 = 0$. Sea $P(x)$ un polinomio cúbico tal que $P(a) = b + c$, $P(b) = c + a$, $P(c) = a + b$ y $P(a+b+c) = -16$. Halla $P(0)$.

9. Hallar todos los polinomios $R(x)$ tales que $R(2x) = 4R(x)$.

10. Hallar todos los polinomios $S(x)$ tales que $S(2x) = 32S(x)$.

11. Sea $P(x)$ un polinomio cuadrático de coeficiente principal igual a 1. Suponga que los polinomios $P(x)$ y $P(P(P(x)))$ tienen una raíz en común, demuestre que $P(0)P(1) = 0$.

12. ¿Para qué valores de n se cumple que $x^2 + x + 1$ es un divisor del polinomio $x^{2n} + x^n + 1$?

13. Halle todos los pares de enteros positivos (m, n) tales que el polinomio $1+x+x^2+\cdots+x^m$ divide a $1 + x^n + x^{2n} + \cdots + x^{mn}$.

7. Referencias

- E. J. Barbeau : **Polynomials.**
- Arthur Engel : **Problem Solving Strategies.**
- Jorge Tipe y Claudio Espinoza: **VI Olimpiada Nacional Escolar de Matemática.** [Artículo: Ecuaciones polinomiales, escrito por Carlomagno Rivera y Jorge Tipe.]

Jorge Tipe Villanueva
jorgetipe@gmail.com

Lima, 15 de febrero de 2014.

Editorial Binaria