# IV Taller de Olimpiadas Matemáticas para Profesores 2014

## Problemas de Estrategias

Juan Neyra Faustino

## Introducción

Los *problemas de estrategia* están relacionados con *juegos* en los que participan dos jugadores, los cuales van jugando por turnos siguiendo ciertas reglas establecidas por el juego. Hay muchos tipos de juegos en los que participan dos jugadores, pero vamos a analizar solo aquellos juegos en los que uno de los dos jugadores tiene una estrategia para ganar el juego sin importar cómo juegue su oponente. Usualmente este tipo de juegos son los que se presentan en muchas olimpiadas.

Veremos varios ejemplos de estos juegos, y mostraremos cómo encontrar la estrategia ganadora.

Las principales estrategias utilizadas son:

1. el uso de la simetría,
2. el uso de emparejamiento de jugadas, y
3. el uso de las posiciones ganadoras y perdedoras.

## Características de los juegos

Las características que deben cumplir los juegos que vamos a analizar son las siguientes:

1. Participan dos jugadores, digamos $A$ y $B$.
2. Los jugadores juegan por turnos. Generalmente $A$ realiza el primer turno.
3. El juego es finito, es decir, en algún momento debe finalizar.
4. El juego tiene bien establecido cómo juegan los jugadores, y cómo es que un jugador gana (o pierde) el juego.
5. Uno de los dos jugadores ganará el juego sin importar cómo juegue su oponente, es decir, uno de los dos jugadores tiene estrategia ganadora.

Recordemos que para resolver un problema de estrategias, debemos determinar cuál es el jugador que tiene estrategia ganadora, y describir cuál es dicha estrategia que le permitirá asegurar la victoria sin importar cómo juegue su oponente.

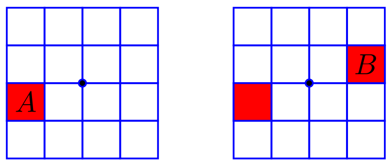
## Simetría

1. $A$ y $B$ juegan, por turnos, a pintar de rojo las casillas de un tablero de $4 \times 4$, el cual tiene, inicialmente, todas sus casillas blancas. En cada turno, cada jugador debe pintar de rojo una casilla del tablero que aún está sin pintar y que no es adyacente a una casilla que ya ha sido pintada anteriormente. Pierde el primer jugador que no puede realizar su jugada. Si $A$ empieza el juego, ¿cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora?

   *Aclaración:* Dos casillas son adyacentes si comparten un lado.

***Solución.*** Probemos que $B$ tiene estrategia ganadora. Su estrategia será la siguiente: cada vez que $A$ pinte una casilla, entonces $B$ pintará la casilla que es simétrica respecto al centro del tablero.

Por ejemplo si $A$, en su primera jugada, pinta la siguiente casilla mostrada en el tablero de la izquierda




entonces $B$ pintará la casilla mostrada en el tablero de la derecha. Podemos notar que cada casilla tiene su casilla simétrica respecto al centro del tablero, además de no ser adyacente.

Como cada casilla del tablero tiene su simétrico respecto al centro del tablero, podemos agrupar a todas las casillas por parejas, de tal forma que las casillas en cada pareja sean simétricas respecto al centro del tablero. Puesto que $A$ empieza el juego, $A$ pintará una casilla de alguna pareja. Luego, $B$, al seguir su estrategia, deberá pintar la otra casilla de dicha pareja. En el segundo turno, $A$ pintará una casilla de otra pareja, luego, $B$ deberá pintar la otra casilla de dicha pareja. Notamos que $B$ siempre podrá pintar una casilla, respetando su estrategia. Además, él nunca pintará una casilla que sea adyacente a una que ya ha sido pintada anteriormente, ya que si fuera así, por la simetría, quiere decir que antes $A$ debió pintar una casilla adyacente a una pintada anteriormente, lo cual no es posible. Por lo tanto, como el juego tiene fin, entonces en algún momento $A$ no podrá jugar, y en consecuencia, $B$ gana el juego. $\square$

El siguiente gráfico nos ayuda a entender mejor la solución anterior:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

Podemos observar que las casillas con un mismo número son simétricas respecto al centro del tablero.

Cada vez que $A$ pinte una casilla etiquetada con $x$, $B$ pintará la otra casilla etiquetada con $x$.

2. $A$ y $B$ juegan, por turnos, a pintar de rojo las casillas de un tablero de $5 \times 5$, el cual tiene, inicialmente, todas sus casillas blancas. En cada turno, cada jugador debe pintar de rojo una casilla del tablero que aún está sin pintar y que no es adyacente a una casilla que ya ha sido pintada anteriormente. Pierde el primer jugador que no puede realizar su jugada. Si $A$ empieza el juego, ¿cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora?

   *Aclaración:* Dos casillas son adyacentes si comparten un lado.

   ***Solución.*** El siguiente gráfico nos ayuda a darnos cuenta que $A$ tiene estrategia ganadora:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 11 | 12 | 0 | 12 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

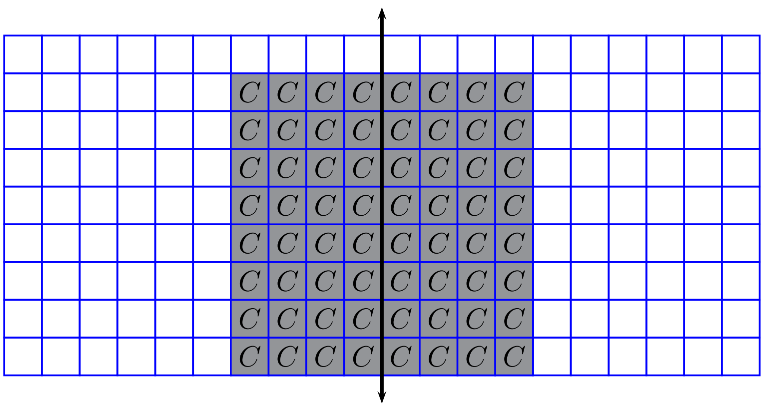
   Podemos observar que las casillas con un mismo número positivo son simétricas respecto a la casilla central del tablero.

   La estrategia de $A$ consiste empezar pintando la casilla 0, y luego, cada vez que $B$ pinte una casilla etiquetada con $x$, $A$ pintará la otra casilla etiquetada con $x$. $\square$

3. Carlos y Daniel juegan sobre un tablero de $9 \times 20$, que inicialmente tiene todas sus casillas blancas, de la siguiente forma: En su turno cada jugador elige del tablero una región cuadrada formada solamente por casillas blancas y las pinta de negro. Carlos inicia el juego y luego se van alternando los turnos. El ganador es el último jugador que pinta de negra la última casilla blanca del tablero, determine si hay una estrategia ganadora para alguno de los jugadores e indíquela.

   **Selectivo Perú 2010**

   ***Solución.*** Probemos que Carlos tiene estrategia ganadora. Su estrategia es la siguiente: Carlos comenzará pintando de negro las casillas de la siguiente región cuadrada (tablero de $8 \times 8$)



   Además, hemos considerado el eje de simetría que divide al tablero en dos subtableros de $9 \times 10$.

Luego, cada vez que Daniel pinte de negro las casillas de una región cuadrada formada solamente por casillas blancas, Carlos pintará de negro todas las casillas que son simétricas, las cuales podemos notar que también son blancas. Por lo tanto, Carlos siempre puede realizar su jugada. Es decir, si Daniel puede jugar, entonces Carlos puede continuar con su jugada (siguiendo su estrategia). En consecuencia, el último jugador en pintar una casilla de negro será Carlos, es decir, él gana el juego. □

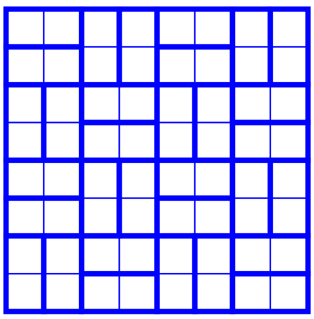
La idea principal del "uso de la simetría" en cierto problema es que de cierta forma sea posible hacer *emparejamientos de jugadas*, de tal manera que el jugador que tiene estrategia ganadora pueda realizar su jugada cada vez que su oponente haga su jugada. Esta idea la debemos rescatar, pues no todos los problemas se resuelven con el uso de la simetría. Por ejemplo, en el siguiente problema, existe una solución con emparejamientos de jugadas.

## Emparejamientos

4. Ana y Brenda juegan, por turnos, a escribir sus iniciales en las casillas de un tablero de $8 \times 8$, el cual, al inicio, tiene todas sus casillas vacías. En cada turno, cada jugador debe escribir su inicial en una casilla vacía del tablero. Escriben sus iniciales hasta llenar todas las casillas del tablero. Si Ana consigue escribir sus iniciales en las 5 casillas de un rectángulo de $1 \times 5$ ó de $5 \times 1$, entonces ella gana el juego, de lo contrario, Brenda gana el juego. Si Ana empieza el juego, ¿cuál de las dos tiene estrategia ganadora?

***Solución.*** Probemos que Brenda tiene estrategia ganadora. Para que Brenda gane el juego, ella debe conseguir que, luego de que hayan terminado de escribir sus iniciales en todas las casillas del tablero, no exista un rectángulo de $1 \times 5$ ó de $5 \times 1$ que tenga escrita la letra $A$ en cada una de sus 5 casillas, es decir, Brenda debe conseguir que la letra $B$ esté escrita en al menos 1 de las 5 casillas de cualquier rectángulo de $1 \times 5$ ó de $5 \times 1$ del tablero.

Consideremos la siguiente partición del tablero en dominós:



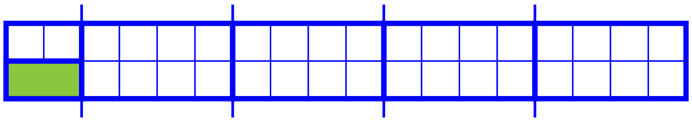
Podemos observar que cualquier rectángulo de $1{\times}5$ ó de $5{\times}1$ siempre contiene un dominó en su interior.

La estrategia de Brenda será la siguiente: Como Ana comienza el juego, cada vez que ella escriba su inicial en la casilla de algún dominó, Brenda escribirá su inicial en la otra casilla del mismo dominó, la cual notamos que debe estar vacía. De esta forma, Brenda se asegura que en los 32 dominós exista una letra $A$ y una letra $B$. En consecuencia, como en cualquier rectángulo de $1 \times 5$ ó de $5 \times 1$ del tablero siempre está contenido un dominó en su interior, entonces Brenda ganará el juego. □

5. Dado un tablero de $2 \times 18$. Ivan y Peter juegan el siguiente juego. Ivan inicia, y coloca un dominó horizontal que cubre exactamente dos casillas del tablero. Luego Peter coloca un dominó vertical que cubre exactamente dos casillas del tablero. Luego Ivan coloca un dominó horizontal. Luego Peter coloca un dominó vertical, y así continúan jugando. La persona quien no pueda colocar su dominó perderá el juego. Determine quién tiene una estrategia ganadora.

**Olimpiada Nacional de Bulgaria 2010**

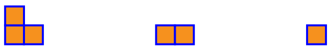
***Solución.*** Mostremos que Ivan tiene estrategia ganadora. En efecto, empecemos considerando la siguiente partición del tablero:



La estrategia de Ivan será la siguiente: su primera jugada será colocar un dominó horizontal en el cuadrado de $2 \times 2$, puede colocarlo en la primera fila.

Luego, Peter deberá colocar su dominó vertical en algún rectángulo de $2 \times 4$. Ivan colocará un dominó horizontal en el mismo rectángulo. Esto asegura que ambos puedan colocar un dominó cada uno en el mismo rectángulo nuevamente. De esta manera, luego de algunas jugadas, todos los rectángulos de $2 \times 4$ se llenarán completamente, siendo Ivan el último en jugar. En el siguiente turno, Peter no podrá colocar un dominó vertical ya que solo quedan dos casillas libres que forman un dominó horizontal. Por lo tanto, Ivan tiene estrategia ganadora. $\square$

6. $A$ y $B$ juegan alternadamente sobre un tablero de $18 \times 24$ con suficientes fichas de los siguientes tipos:



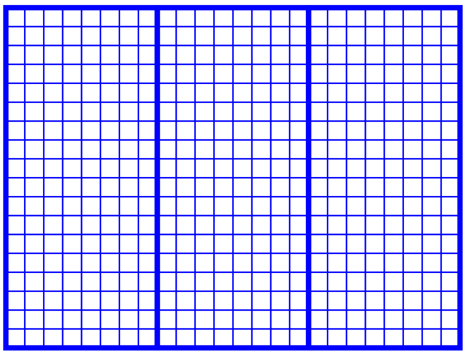
**Tipo 1** **Tipo 2** **Tipo 3**

En su turno, $A$ debe colocar una ficha del tipo 1 sobre casillas vacías del tablero. $B$, en su turno, debe colocar exactamente una ficha de cada tipo sobre casillas vacías del tablero. Pierde el jugador que ya no puede realizar su jugada. Si empieza $A$, decida quién tiene una estrategia ganadora.

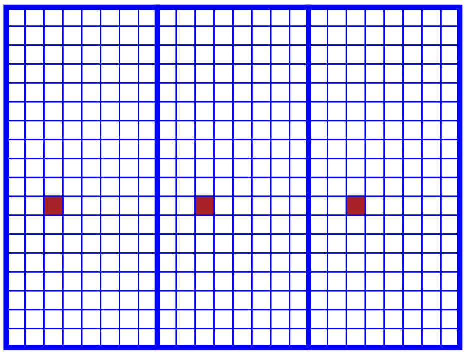
*Aclaración:* Las fichas se pueden rotar pero no se pueden superponer, ni salir del tablero. Las fichas del tipo 1, 2 y 3 se colocan exactamente sobre 3, 2 y 1 casillas del tablero respectivamente.

**Cono Sur 2012**

***Solución.*** Empecemos dividiendo al tablero en tres rectángulos de $23 \times 8$:



Consideremos todas las ternas de casillas $(i, j)$, $(i, j+8)$, $(i, j+16)$:

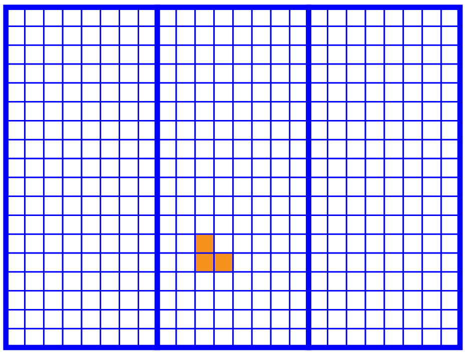


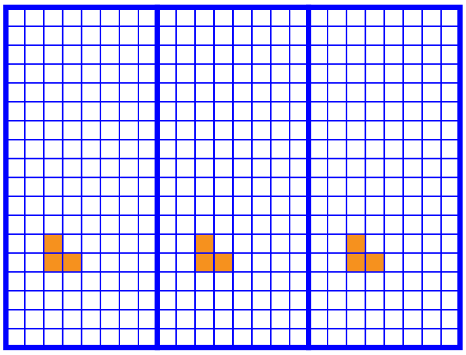
donde $1 \leq i \leq 18$, $1 \leq j \leq 8$. La casilla $(a, b)$ es la que está en la fila $a$, columna $b$.

Probemos que $B$ tiene estrategia ganadora. En efecto, $B$ jugará de la siguiente manera: Cada vez que $A$ coloque una ficha cubriendo tres casillas del tablero, digamos $a$, $b$, $c$, entonces $B$ cubrirá las casillas $a'$, $b'$ $c'$, $a''$, $b''$, $c''$, donde $(a, a', a'')$, $(b, b', b'')$ y $(c, c', c'')$ son las ternas de $a$, $b$ y $c$, respectivamente.

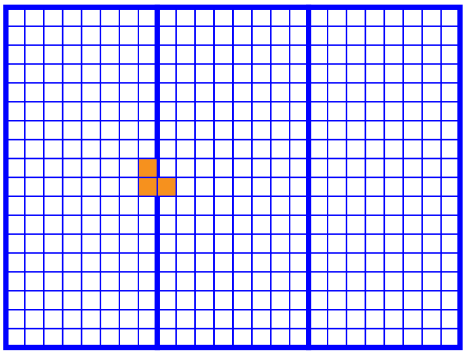
Veamos que $B$ siempre podrá realizar esta jugada sin importar como coloque $A$ su ficha. Existen dos posibilidades: que $A$ coloque su ficha en el interior de una de las regiones ó que $A$ coloque su ficha sobre una línea que separa dos regiones consecutivas. Analicemos cada caso.

Caso 1: Si la ficha que colocó $A$ está en el interior de una de las regiones, entonces basta que $B$ cubra $a', b', c'$ con la ficha del tipo 1 y $a'', b'', c''$ con las fichas del tipo 2 y 3.

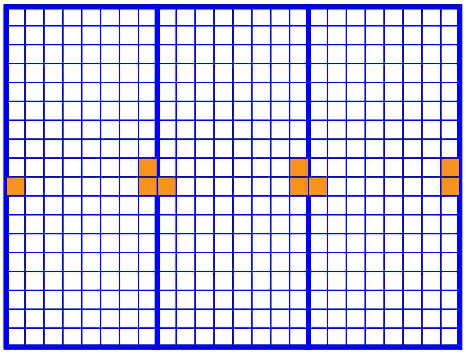




Caso 2: Si la ficha que colocó $A$ está sobre una línea que separa dos regiones consecutivas, entonces basta que $B$ cubra $a', b', c'$ con la ficha del tipo 1, una o dos casillas de $a'', b'', c''$ con una de las fichas 2 ó 3, y las casillas restantes con la ficha restante.



Caso 3: Si la ficha que colocó $A$ está sobre una línea que separa dos regiones consecutivas, entonces basta que $B$ cubra $a', b', c'$ con la ficha del tipo 1, una o dos casillas de $a'', b'', c''$ con una de las fichas 2 ó 3, y las casillas restantes con la ficha restante.

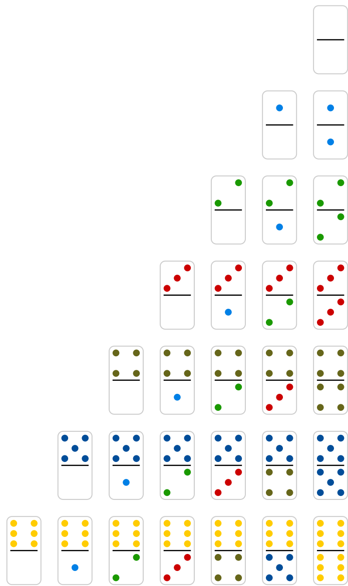


De este modo después de que $B$ juegue su turno, cada terna de casillas estarán o todas cubiertas o todas vacías, además, cada vez que $A$ realiza una jugada, $B$ garantiza la suya. Finalmente al ser un juego finito, el perdedor solo puede ser $A$, por lo tanto $B$ gana el juego. $\square$

7. En una caja yace un conjunto completo de dominós de orden 6. (Esto es, para cada par de enteros $i$, $j$ con $0 \leq i \leq j \leq 6$, existe exactamente un dominó con $i$ en una casilla y con $j$ en la otra.) Dos jugadores se turnan para seleccionar un dominó de la caja y lo agregan a uno de los extremos de una cadena lineal abierta en la mesa, de tal manera que dominós adyacentes tengan los mismos números en sus casillas adyacentes. (El movimiento del primer jugador puede ser cualquier dominó.) El primer jugador que no pueda mover pierde. ¿Cuál de los jugadores tiene estrategia ganadora?

**Rusia 1999**

***Solución.*** Estas son las fichas de dominó que tenemos en la caja:

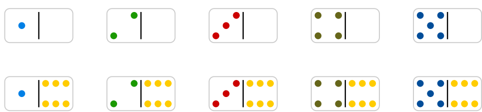


Probemos que el primer jugador tiene estrategia ganadora. En efecto, el primer jugador comenzará colocando sobre la mesa el dominó $(0, 0)$ y supongamos que el segundo jugador coloca el dominó $(0, n)$ $(n \neq 0)$, luego la siguiente jugada del primer jugador será colocar el $(n, n)$.

Observamos que, los extremos de la cadena conformada por los 3 dominós son 0 y $n$:

Sin pérdida de generalidad, hemos supuesto que $n = 6$, es decir, que el segundo jugador colocó el dominó $(0, 6)$.

Como es el turno del segundo jugador, y hasta el momento, la cadena conformada por los 3 dominós tiene extremos 0 y 6, él deberá utilizar uno de los siguientes dominós:



A partir de ese momento, si el segundo jugador coloca el dominó $(0, m)$ adyacente al 0, entonces el primer jugador colocará el dominó $(m, 6)$ adyacente al $m$, y si el segundo jugador coloca el dominó $(6, m)$ adyacente al 6, entonces el primer jugador colocará el dominó $(m, 0)$ adyacente al $m$; dejando nuevamente, en cualquiera de los casos, una cadena con extremos 0 y 6, o con ambos extremos iguales a 0, o con ambos extremos iguales a 6. Esto asegura que luego de que juegue el primer jugador, el segundo jugador solo podrá utilizar los dominós que restan de la figura anterior.

En consecuencia, el primer jugador siempre podrá realizar su jugada con esta estrategia, es decir, si el segundo jugador puede jugar entonces el primer jugador también podrá jugar. Por lo tanto, el primer jugador gana el juego. $\square$

## Posiciones Ganadoras

Algunos tipos de juegos poseen ciertas configuraciones que siempre llevan al jugador que le toca jugar a la victoria. Esas configuraciones son llamadas *posiciones ganadoras*. Todas las demás configuraciones son las *posiciones perdedoras*.

Veamos algunos problemas, en los que se utiliza esta idea.

8. Sobre una mesa hay, en un inicio, 15 piedras. Los jugadores $A$ y $B$ juegan, por turnos, a retirar piedras de la mesa. En cada turno está permitido retirar 1, 2 ó 3 piedras. Aquel jugador que retire la última piedra gana el juego. ¿Cuál de los dos jugadores puede asegurar una victoria?

***Solución.*** Es importante analizar los "casos pequeños" antes de analizar los "casos grandes". A esta técnica se le conoce como *búsqueda de un patrón*. ¿Qué sucede si tenemos 1, 2 ó 3 piedras en un inicio? ¿Quién puede asegurar la victoria? Es trivial notar que $A$ es la respuesta. A continuación, analicemos si tenemos 4 piedras en un inicio. En este caso, si $A$ retira 1, 2 ó 3 piedras, entonces $B$ saca 3, 2 ó 1 piedras, respectivamente, y asegura su victoria.

Siguiendo el análisis anterior, podemos demostrar que las posiciones perdedoras son todos los múltiplos de 4. En efecto, si $A$ se encuentra en una posición $n = \overset{\circ}{4}$, entonces al retirar 1, 2 ó 3 piedras, $B$ retirará 3, 2 ó 1 piedra, dejando a $A$ en la posición $n - 4$ que también es $\overset{\circ}{4}$. Luego, como el juego es finito, en algún momento $A$ se encontrará en la posición 0, lo cual indica que $B$ fue el que retiró la última piedra, y por lo tanto, $A$ pierde.

Como 15 es una posición ganadora, pues no es $\overset{\circ}{4}$, entonces $A$ asegura su victoria. Su primera jugada será retirar 3 piedras, de tal manera que deja a $B$ en 12, una posición perdedora. $\square$

El problema anterior, nos indica que para resolver un problema de estrategia utilizando las posiciones ganadoras, es necesario conocer qué es una posición ganadora y qué es una posición perdedora, así que tengan presentes las siguientes definiciones:

- Posición ganadora: A partir de ella, existe una forma de realizar nuestra jugada, de tal manera que deje a mi oponente en una posición perdedora.
- Posición perdedora: A partir de ella, no importa como realicemos nuestra jugada, siempre dejaré a mi oponente en una posición ganadora.

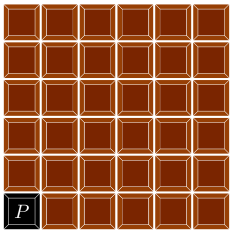
Sigamos viendo problemas.

9. Sobre una mesa hay, en un inicio, 100 piedras. Los jugadores $A$ y $B$ juegan, por turnos, a retirar piedras de la mesa. En cada turno está permitido retirar $1, 2, 4, 8, \ldots$ piedras (cualquier potencia de 2). Aquel jugador que retire la última piedra gana el juego. ¿Cuál de los dos jugadores puede asegurar una victoria?

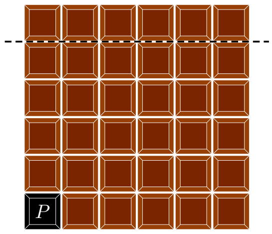
***Solución.*** Probemos que las posiciones perdedoras son todos los $\overset{\circ}{3}$. En efecto, si un jugador se encuentra en una posición $\overset{\circ}{3}$, él no podrá dejar a su oponente en otra posición $\overset{\circ}{3}$, pues $2^k$ nunca es $\overset{\circ}{3}$. En cambio, si un jugador se encuentra en una posición que no es $\overset{\circ}{3}$, él podrá dejar a su oponente en una posición $\overset{\circ}{3}$, retirando 1 ó 2 piedras. Con la ayuda de los "casos pequeños" (1, 2, 3) podemos llegar a lo afirmado.

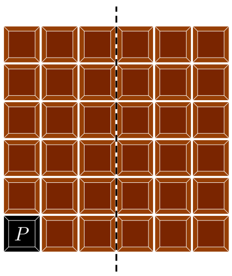
Por lo tanto, como 100 no es $\overset{\circ}{3}$, entonces $A$ tiene estrategia ganadora, su primera jugada será retirar 1 primera, dejando a $B$ en una posición $\overset{\circ}{3}$, una posición perdedora. $\square$

10. Se tiene un chocolate en forma de un tablero de $6 \times 6$, con una casilla negra prohibida $(P)$. Dos jugadores $A$ y $B$ juegan el siguiente juego tomando turnos alternados. En un solo movimiento, se puede partir el chocolate en dos partes por una línea recta (una que sea del límite de las casillas) y comer la parte que no contiene la casilla $P$. El jugador que no pueda hacer un movimiento pierde. Si $A$ comienza, ¿cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora?




***Solución.*** Si $A$ es su primera jugada divide al chocolate horizontalmente, entonces es claro que deberá comerse la parte de arriba, y si divide al chocolate verticalmente, entonces deberá comerse la parte de la derecha.

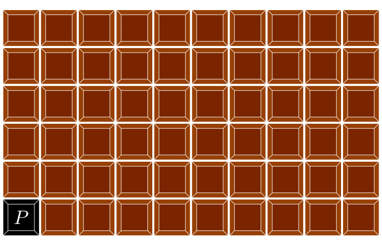


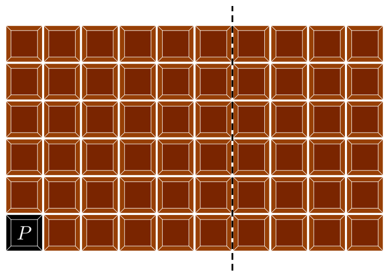

Demostremos que $B$ posee estrategia ganadora, es la siguiente: cada vez que $A$ divida al chocolate horizontalmente o verticalmente, comiéndose $i$ filas o $i$ columnas, respectivamente, entonces $B$ dividirá al resto del chocolate verticalmente u horizontalmente, comiéndose $i$ columnas o $i$ filas, respectivamente.

En efecto, si $B$ sigue esta estrategia, entonces después de su turno, siempre dejará a $A$ con un chocolate cuadrado, y como el juego es finito, entonces en algún momento $A$ se encontrará con un chocolate de lado 1, es decir, solo tendrá la casilla prohibida, y por lo tanto, él no puede jugar. En consecuencia, $B$ gana el juego. $\square$

11. Se tiene un chocolate en forma de un tablero de $6 \times 10$, con una casilla negra prohibida $(P)$. Dos jugadores $A$ y $B$ juegan el siguiente juego tomando turnos alternados. En un solo movimiento, se puede partir el chocolate en dos partes por una línea recta (una que sea del límite de las casillas) y comer la parte que no contiene la casilla $P$. El jugador que no pueda hacer un movimiento pierde. Si $A$ comienza, ¿cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora?



***Solución.*** Con la ayuda del problema anterior, es claro que $A$ tiene estrategia ganadora. Su primera jugada es dividir verticalmente el chocolate y comerse las 4 columnas derechas, dejando a $B$ con un chocolate de $6 \times 6$.



□

Por este problema y el anterior, podemos deducir que las posiciones de la forma $a \times a$ ($a \in \mathbb{Z}^+$) son posiciones perdedoras, mientras que las posiciones de la forma $a \times b$ ($a, b \in \mathbb{Z}^+$, $a \neq b$) son posiciones ganadoras.

## Problemas Propuestos

12. Marcamos veinte puntos en una circunferencia. Los jugadores $A$ y $B$ juegan, por turnos, a unir dos de los puntos. Cada jugador puede unir dos de esos puntos si ese nuevo segmento formado no corta a los hechos anteriormente. Quien no puede trazar ningún segmento más pierde. Si $A$ comienza el juego, ¿cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora?

13. En una caja existen 300 bolitas. Los jugadores $A$ y $B$ juegan, por turnos, retirar bolitas de la caja. Cada jugador puede retirar no más de la mitad de las bolitas que están en la caja. El jugador que no puede jugar más pierde. Si $A$ comienza el juego, ¿cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora?

14. Dos jugadores $A$, $B$ y otras 2001 personas forman un círculo, de modo que $A$ y $B$ no quedan en posiciones consecutivas. $A$ y $B$ juegan por turnos alternadamente empezando por $A$. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

15. En un tablero de ajedrez hay un rey en una esquina. $A$ y $B$ se turnan moviendo el rey a cualquier casilla que tenga al menos un vértice en común con la ocupada por el rey y que no haya sido visitada previamente. El primero que no pueda jugar pierde. ¿Qué jugador tiene una estrategia ganadora, y cuál es? ¿Y si se cambia el rey por un caballo?

16. Se dan 98 puntos sobre una circunferencia. María y José juegan alternadamente de la siguiente manera: cada uno de ellos traza un segmento uniendo dos de los puntos dados que no hayan sido unidos entre si anteriormente. El juego termina cuando los 98 puntos han sido usados como extremos de un segmento al menos una vez. El vencedor es la persona que realiza el último trazo. Si José inicia el juego, ¿quién puede asegurarse la victoria?

17. Dos jugadores $A$ y $B$, juegan por turnos el siguiente juego: Se tiene un montón de 2003 piedras. En su primer turno, $A$ escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras

del montón inicial. Posteriormente, $B$ escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y siguen así sucesivamente. Pierde el jugador que retire la última piedra. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

18. Todos los divisores positivos de un entero positivo $N$ son escritos en la pizarra. Dos jugadores $A$ y $B$ juegan el siguiente juego tomando movimientos alternados. En el primer movimiento, el jugador $A$ borra $N$. Si el último número borrado es $d$, entonces el siguiente jugador borra o un divisor de $d$ o un múltiplo de $d$. El jugador que no puede hacer un movimiento pierde. Determinar todos los números $N$ para los cuales $A$ puede ganar de forma independiente de los movimientos de $B$.

    *[Middle European Mathematical Olympiad 2010]*

19. Javier y Paul juegan por turnos de la siguiente manera: En el turno 1, Javier escribe 1 ó 2 en la pizarra; en el turno 2, Paul escribe 2 ó 3; en el turno 3, Javier escribe 3 ó 4, y así sucesivamente hasta el turno $n$ y finaliza el juego. Javier gana si la suma de todos los números escritos es múltiplo de 3, en cualquier otro caso gana Paul. Determina quién de los dos tiene estrategia ganadora, en cada uno de los siguientes casos:

    a) Cuando $n$ es par.
    b) Cuando $n = 2011$.

    *[ONEM 2011]*

20. Se marcan $N$ puntos sobre una circunferencia ($N \geq 5$) de modo que los $N$ arcos formados tienen la misma longitud. Se colocan $N$ fichas sobre los $N$ puntos marcados (una ficha por cada punto). Dos jugadores, Ricardo y Tomás juegan retirando las fichas colocadas, de acuerdo con las siguientes reglas:

    - Los turnos de juego son intercalados.
    - Empieza Ricardo.
    - Si en el turno de un jugador hay tres fichas tales que los correspondientes puntos marcados forman un triángulo no obtusángulo, el jugador debe retirar una de esas fichas.
    - Pierde el jugador que no puede retirar ficha alguna en su turno.

    ¿Algún jugador tiene estrategia ganadora? En caso afirmativo, ¿en qué consiste tal estrategia?

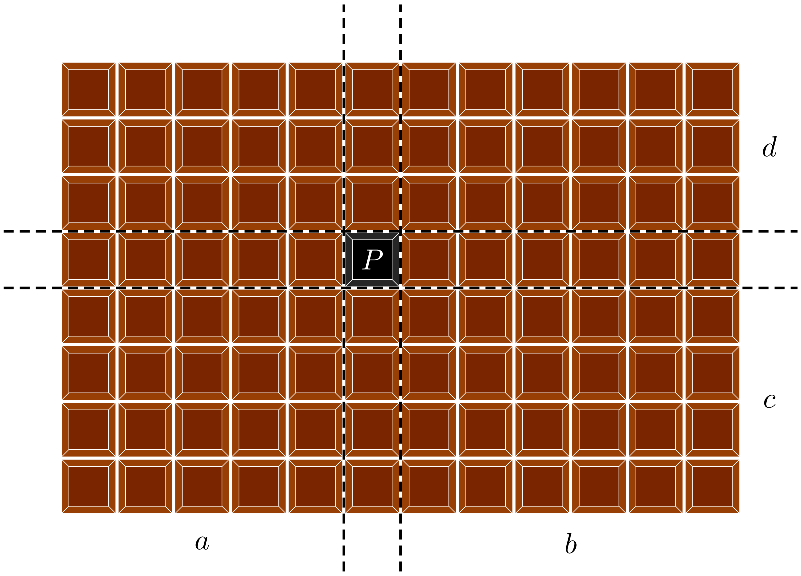
    *[ONEM 2009]*

21. En un montón hay 1000 piedras. Dos jugadores se turnan para retirar piedras alternadamente. El primer jugador en su primera jugada puede retirar todas las piedras que quiera, pero no todas, y debe retirar por lo menos una. A partir de allí cada jugador debe retirar al menos una piedra y como máximo el doble de las que retiró su contrario en la jugada precedente. El que retira la última piedra gana. Determinar cuál jugador tiene estrategia una ganadora y encontrarla.

22. Alicia y Bob juegan un juego en el cual ellos toman turnos para remover piedras de un montículo que inicialmente tiene $n$ piedras. El número de piedras removidas en cada turno debe ser uno menos que un número primo. El ganador es el jugador quien tome la última piedra. Alicia juega primero. Pruebe que existen infinitos $n$ tal que Bob tiene una estrategia ganadora. (Por ejemplo, si $n = 17$, entonces Alicia quizás toma 6 piedras dejando 11; luego Bob quizás tome 1 piedra dejando 10; luego Alicia puede tomar las piedras restantes para ganar.)

*[Putnam Competition 2006]*

23. Se tiene un chocolate en forma de un tablero de $m \times n$. En este chocolate una de sus casillas ha sido marcada como prohibida ($P$). Dos jugadores $A$ y $B$ juegan el siguiente juego tomando movimientos alternados. En un solo movimiento, se puede partir el chocolate en dos partes por una línea recta (una que sea del límite de las casillas) y comer la parte que no contiene la casilla prohibida. El jugador que no pueda hacer un movimiento pierde. ¿Cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora dependiendo de la casilla que ha sido marcada como prohibida?




Juan Neyra Faustino
juan.neyra@gmail.com

Lima, 15 de febrero de 2014.