



PERÚ
Ministerio
de Educación



Sociedad Matemática Peruana

XI OLIMPIADA NACIONAL ESCOLAR DE MATEMÁTICA (ONEM 2014)

Segunda Fase - Nivel 3

21 de agosto de 2014

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Te recalamos que no puedes llevarte estas hojas que contienen los enunciados ni tampoco **publicar o discutir los problemas en internet**, así nos ayudarás a que la olimpiada se realice de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

1. Determine el valor de la siguiente expresión

$$\frac{\cos^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ + 3 \cos^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ}.$$

2. En una caja cerrada hay 10 canicas azules, 11 canicas rojas, 12 canicas amarillas y 13 canicas blancas. ¿Cuántas canicas debemos sacar como mínimo, sin ver, para obtener con seguridad al menos cinco canicas de cada color?

3. Determine el menor entero positivo n para el cual la suma

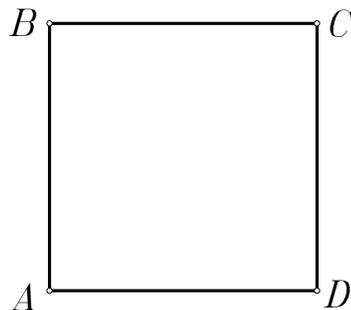
$$2 + 3 + 4 + \cdots + n$$

es múltiplo de 567.



Segunda Fase - Nivel 3

4. En una fiesta los asistentes bailan en parejas formadas por un hombre y una mujer, pero en un momento dado no es necesario que todos los asistentes estén bailando. Se observó que cada hombre bailó con exactamente 3 mujeres y cada mujer bailó con exactamente 4 hombres. ¿Cuántos asistentes hay en total si este número está entre 30 y 40?
5. La ecuación $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = -1$ tiene algunas raíces reales. Si r es la menor raíz real de esa ecuación y R es la mayor raíz real, determine el valor de $r + R$.
6. Un texto antiguo menciona el siguiente acertijo:
“Tengo tres números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$, los dos mayores son consecutivos y su suma es divisible por el menor de los tres números, además, si supieras el valor del menor podrías determinar con seguridad los otros dos números. Te reto a que adivines cuáles son mis tres números”.
Determine la suma de los tres números que resuelven el acertijo.
7. Diremos que un cuadrilátero es *especial* si al menos uno de sus ángulos interiores es mayor o igual que 135° . Se tiene un cuadrado $ABCD$:

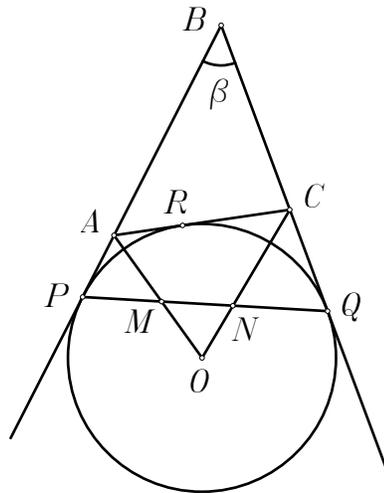


donde se eligen dos puntos M y N sobre el lado AB (con M entre A y N), los puntos P y Q sobre el lado BC (con P entre B y Q), los puntos R y S sobre el lado CD (con R entre C y S) y los puntos T y U sobre el lado DA (con T entre D y U). Al trazar los segmentos MS , NR , QT y PU el cuadrado queda dividido en 9 cuadriláteros, ¿como máximo cuántos de estos 9 cuadriláteros pueden ser especiales?

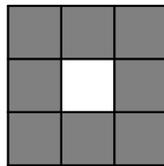
8. Se sabe que el número 4^{100} tiene 61 dígitos. ¿Cuántos dígitos tiene el número 5^{100} ?

Segunda Fase - Nivel 3

9. En la figura mostrada, la circunferencia de centro O es tangente a las rectas BA , BC y AC en los puntos P , Q y R , respectivamente. Los segmentos OA y OC cortan al segmento PQ en los puntos M y N . Si $PM = 5$, $MN = 6$ y $NQ = 7$, determine el valor de $5 \times 6 \times 7 \times \cos \beta$.



10. La ficha O , formada por 8 cuadraditos, se genera al quitar el cuadradito central de un tablero de 3×3 . En la siguiente figura están sombreados los 8 cuadraditos de una ficha O :



¿Cuántos cuadraditos de un tablero de 10×10 se deben marcar con el símbolo \star , como mínimo, para asegurar que cualquier ficha O incluida completamente en el tablero cubra al menos un cuadradito marcado con \star ?

Aclaración: Cada ficha O debe cubrir exactamente 8 cuadraditos.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN