Sociedad Matemática Peruana

XI Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2014)

Segunda Fase - Nivel 2

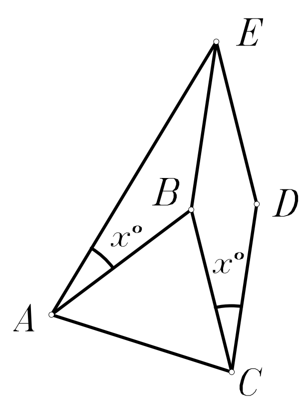
21 de agosto de 2014

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en esta etapa de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- Tienes un tiempo máximo de 2 horas para resolver estos retos matemáticos que te planteamos.
- Ten en cuenta que no está permitido el uso de calculadoras y otros recursos de consulta como apuntes o libros.
- Al momento que consideres que has culminado tu participación, haz entrega de estas hojas junto con la hoja de respuestas. En caso de ocurrir un empate se tomará en cuenta la hora de entrega.
- Te recalcamos que no puedes llevarte estas hojas que contienen los enunciados ni tampoco **publicar o discutir los problemas en internet**, así nos ayudarás a que la olimpiada se realize de la mejor forma posible.

ESCRIBE EL RESULTADO DE CADA PROBLEMA EN LA HOJA DE RESPUESTAS.
EN TODOS LOS CASOS EL RESULTADO ES UN NÚMERO ENTERO POSITIVO.

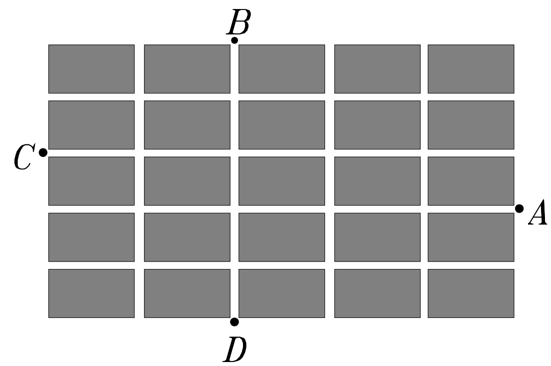
1. En la figura, ABC es un triángulo equilátero y $BCDE$ es un rombo. Además, los ángulos $\angle BAE$ y $\angle BCD$ miden $x°$ (en grados sexagesimales). Determine el valor de x.



Aclaración: Un rombo es un cuadrilátero que tiene sus cuatro lados iguales.

Segunda Fase - Nivel 2

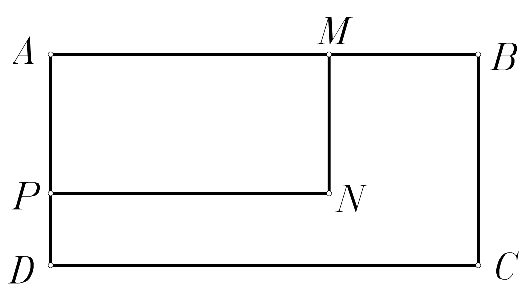
2. Se muestra una parte del plano de una ciudad donde los rectángulos representan las manzanas, además, todos los rectángulos son iguales. Para ir desde el cruce A hasta el cruce B el mínimo recorrido es de 390 metros; y para ir desde el cruce A hasta el cruce C el mínimo recorrido es de 430 metros. ¿De cuántos metros es el mínimo recorrido para ir desde el cruce A hasta el D ?



3. ¿Cuántos elementos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ son divisores del número $2014^2 - 1$?

4. Sea $x_1 = \sqrt[5]{5}$, $x_2 = (\sqrt[5]{5})^{\sqrt[5]{5}}$ y en general $x_n = (x_{n-1})^{\sqrt[5]{5}}$, para cualquier $n \geq 2$. Es decir, la sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$ cumple que cada término, a partir del segundo, es igual al anterior elevado al exponente $\sqrt[5]{5}$. Determine el menor entero positivo n para el cual x_n es un número entero múltiplo de 5.

5. En la figura, $ABCD$ y $AMNP$ son dos rectángulos cuyas áreas miden 30 cm^2 y 16 cm^2, respectivamente. Calcule el área del cuadrilátero $MBDP$, en cm^2.



6. En el plano cartesiano considere los 12 puntos que tienen coordenadas (0,0), (0,1), (0,2), (0,3) (1,0), (1,3), (2,0), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3). ¿De cuántas formas se puede escoger 3 de esos 12 puntos de tal forma que esos 3 puntos sean los vértices de un triángulo rectángulo?

Segunda Fase - Nivel 2

7. Decimos que un número de 4 dígitos $\overline{abcd}$ es *osado* si $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ son números de 2 dígitos tales que $\overline{ab}+\overline{cd}$ es un divisor de $\overline{abcd}$. Por ejemplo, el número 2013 es osado, pues $20+13=33$ es un divisor de 2013. Si $\overline{abcd}$ es un número osado, determine el mayor valor que puede tomar la expresión:
$$\frac{\overline{abcd}}{\overline{ab}+\overline{cd}}.$$
Aclaración: Como $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ son números de 2 dígitos, entonces a y c son mayores que 0.

8. En una fiesta los asistentes bailan en parejas formadas por un hombre y una mujer, pero en un momento dado no es necesario que todos los asistentes estén bailando. Durante la primera hora, se observó que cada mujer bailó exactamente con 4 hombres y cada hombre bailó exactamente con 5 mujeres. Luego, se fueron 9 mujeres y en la siguiente hora se observó que cada mujer bailó con exactamente 5 hombres y cada hombre bailó con exactamente 4 mujeres. ¿Cuántos asistentes había al inicio de la fiesta?

9. Un entero positivo N es llamado *super-cuadrado* si tiene la siguiente propiedad: si sumamos todos los dígitos de N, luego a esta suma le restamos uno de los dígitos de N (elegido convenientemente) y finalmente el resultado es elevado al cuadrado, obtenemos el mismo número N. Determine el mayor super-cuadrado.

10. Sean x, y, z números reales tales que
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=144, \\ x+y+z=6. \end{cases}$$
Si el mayor valor posible de $|x|+|y|+|z|$ se expresa como $m+\sqrt{n}$, donde m y n son enteros positivos. Determine el valor de $m+n$.

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN