LIV Olimpiada Internacional de Matemática (IMO)

Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana

Primer Examen Selectivo

Duración: 4 horas y 30 minutos.

---

1. Algunos enteros positivos están escritos en una fila. Una operación consiste en lo siguiente: Alicia escoge dos números adyacentes a y b, tales que $a > b$ y a está a la izquierda de b, y reemplaza la pareja (a, b) por una de las siguientes parejas: $(b + 1, a)$ ó $(a - 1, a)$. Pruebe que Alicia sólo puede realizar un número finito de operaciones.

2. Sea $a \geq 3$ un número real, y P un polinomio de grado n y coeficientes reales. Pruebe que al menos uno de los siguientes números es mayor o igual que 1:

$$|a^0 - P(0)|,\ |a^1 - P(1)|,\ |a^2 - P(2)|,\ \ldots,\ |a^{n+1} - P(n+1)|.$$

3. Un punto P está en el lado AB de un cuadrilátero convexo $ABCD$. Sea ω la circunferencia inscrita del triángulo CPD e I el centro de ω. Se sabe que ω es tangente a las circunferencias inscritas de los triángulos APD y BPC en K y L, respectivamente. Sea E el punto de intersección de las rectas AC y BD, y F el punto de intersección de las rectas AK y BL. Pruebe que los puntos E, I, F son colineales.

San Miguel, 16 de marzo de 2013

`http://selectivos-peru.blogspot.com`

LIV Olimpiada Internacional de Matemática (IMO)

Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana

Segundo Examen Selectivo

Duración: 4 horas y 30 minutos.

---

1. Sea A un punto fuera de una circunferencia ω. Por A se trazan dos rectas que cortan a ω, la primera corta a ω en B y C, mientras que la segunda corta a ω en D y E (D está entre A y E). La recta que pasa por D y es paralela a BC intersecta a ω en $F \neq D$, y la recta AF intersecta a ω en $T \neq F$. Sean M el punto de intersección de BC y ET, N el simétrico de A con respecto a M, y K el punto medio de BC. Pruebe que el cuadrilátero $DEKN$ es cíclico.

2. Determine todos los enteros $m \geq 2$ que tienen la siguiente propiedad: Cualquier entero n tal que $\frac{m}{3} \leq n \leq \frac{m}{2}$ es un divisor del número $\binom{n}{m-2n}$.

3. A y B juegan con $N \geq 2012$ monedas y 2012 cajas distribuidas alrededor de una circunferencia. Al inicio A distribuye las monedas en las cajas de tal forma que haya al menos 1 moneda en cada caja. Luego ellos realizan sus jugadas en el orden $B, A, B, A, \ldots$ de acuerdo a las siguientes reglas:

- B en su jugada pasa una moneda de cada caja a una caja adyacente.
- A en su jugada escoge algunas monedas que no estuvieron involucradas en la jugada anterior (realizada por B) y que están en cajas diferentes. Luego A pasa cada moneda escogida a una caja adyacente.

El objetivo de A es asegurar que haya al menos 1 moneda en cada caja después de cualquier jugada suya, sin importar cómo juega B y cuántas jugadas hubo en total. Halle el menor N para el cual A puede lograr su objetivo.

San Miguel, 23 de marzo de 2013

`http://selectivos-peru.blogspot.com`