53^a OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA 2012

Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana

Primer Examen Selectivo

Duración: 4 horas

$\boxed{\mathbf{1}}$ *a*) Encuentre una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(f(x)) = \frac{x^2 - x}{2} \cdot f(x) + 2 - x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

b) De todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen la condición $(*)$, halle los posibles valores de $f(2)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo, y h_a, h_b, h_c las longitudes de las alturas de dicho triángulo relativas a los lados a, b, c, respectivamente. Si $t \geq \frac{1}{2}$ es un número real, demuestre que existe un triángulo de lados:

$$t \cdot a + h_a, \quad t \cdot b + h_b, \quad t \cdot c + h_c.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Suponga que 1000 estudiantes están sentados alrededor de una circunferencia. Pruebe que existe un entero k, con $100 \leq k \leq 300$, para el cual existe un grupo de $2k$ estudiantes consecutivos tal que la primera mitad del grupo contiene el mismo número de mujeres que la segunda mitad.

San Miguel, 19 de Mayo de 2012

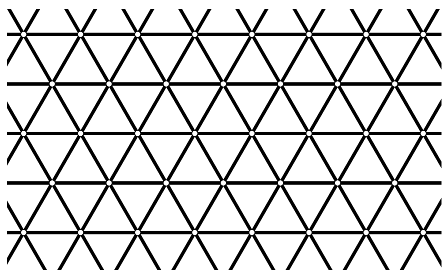
53^a OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA 2012

Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana

Segundo Examen Selectivo

Duración: 4 horas

$\boxed{4}$ Se tiene una retícula triangular infinita en la cual la distancia entre dos puntos adyacentes siempre es igual a 1:



Se escogen los puntos A, B y C de la retícula que son los vértices de un triángulo equilátero de lado L, en cuyos lados ya no hay más puntos de la retícula. Demuestra que en el interior del triángulo ABC hay exactamente $\dfrac{L^2-1}{2}$ puntos de la retícula.

$\boxed{5}$ Sea $ABCD$ un parelogramo tal que $\angle ABC > 90^\circ$ y $\mathcal{L}$ la recta perpendicular a BC que pasa por B. Suponga que el segmento CD no corta a $\mathcal{L}$. De todas las circunferencias que pasan por C y D, hay una que es tangente a $\mathcal{L}$ en P y hay otra que es tangente a $\mathcal{L}$ en Q ($P \neq Q$). Si M es el punto medio de AB, demuestre que $\angle PMD = \angle QMD$.

$\boxed{6}$ Sea p un número primo impar. Para cada entero a, definimos el número:

$$S_a = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^{p-1}}{p-1}.$$

Sean m y n números enteros tales que:

$$S_3 + S_4 - 3S_2 = \frac{m}{n},$$

demuestre que m es múltiplo de p.

San Miguel, 26 de Mayo de 2012