XXIII Olimpiada Matemática de Países del Cono Sur

Lista Corta de Problemas

Lima - Perú
2012

Esta Lista Corta de Problemas es confidencial hasta la siguiente Cono Sur (2013)

Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana.

Comité de Problemas de la XXIII Olimpiada Matemática del Cono Sur:

- John Cuya
- Jorge Tipe
- Enrique Valeriano

Contenido

Combinatoria

C1. Anita quiere cubrir un tablero cuadriculado de 13×13 con varias tiras de papel de 2×6, de tal modo que no quede ninguna casilla sin cubrir. ¿Cuántas tiras debe usar Anita como mínimo?

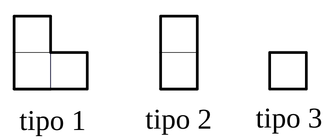
Aclaración: Las tiras se pueden superponer y rotar. Cada tira debe cubrir exactamente 12 casillas del tablero.

C2. Alrededor de una circunferencia están escritos 2012 números, cada uno de los cuales es igual a 1 ó -1. Si no hay 10 números consecutivos cuya suma sea 0, halle todos los valores que puede tomar la suma de los 2012 números.

C3. Sea n un entero positivo par. Un triángulo equilátero de lado n se divide mediante rectas paralelas a sus lados en n^2 triangulitos equiláteros de lado 1. Demuestre que si es posible cubrir el tablero sin huecos ni superposiciones con n fichas congruentes, cada una de las cuales cubre exactamente n triangulitos del tablero, entonces n es múltiplo de 4.

C4. Una *ficha de dominó* es un rectángulo de 1×2 o de 2×1. Diego juega a cubrir completamente un tablero de 6×6 usando 18 fichas de dominó. Determina el menor entero positivo k para el cual Diego puede colocar k fichas de dominó sobre el tablero (sin que se superpongan) tal que lo que queda del tablero se pueda cubrir de forma única usando las fichas de dominó restantes.

C5. A y B juegan alternadamente sobre un tablero de 2012×2013 con suficientes fichas de los siguientes tipos:



En su turno, A debe colocar una ficha del tipo 1 sobre casillas vacías del tablero. B, en su turno, debe colocar exactamente una ficha de cada tipo sobre casillas vacías del tablero. Pierde el jugador que ya no puede realizar su jugada. Si empieza A, decida quién tiene una estrategia ganadora.

Aclaración: Las fichas se pueden rotar pero no se pueden superponer, ni salir del tablero.

Geometría

G1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sea P la intersección de las rectas BC y AD. La recta AC corta a la circunferencia circunscrita del triángulo BDP en S y T, con S entre A y C. La recta BD corta a la circunferencia circunscrita del triángulo ACP en U y V, con U entre B y D. Demuestre que $PS = PT = PU = PV$.

G2. Dado un triángulo ABC, sean M y N puntos variables de los lados AB y AC, respectivamente, tales que ni M ni N coinciden con los vértices y, además, $AM \cdot MB = AN \cdot NC$. Pruebe que la mediatriz del segmento MN pasa por un punto fijo.

G3. Dado un triángulo ABC, sean M, N y P puntos de los lados AB, BC y CA, respectivamente, tales que $MBNP$ es un paralelogramo. La recta MN corta a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en los puntos R y S. Pruebe que la circunferencia circunscrita del triángulo RPS es tangente a AC.

G4. Sea P un punto del lado CD de un cuadrado $ABCD$. En el triángulo ABP se trazan las alturas AQ y BR, con Q en el segmento BP y R en el segmento AP. Sea S el punto de intersección de las rectas CQ y DR, demuestre que $\angle ASB = 90°$.

G5. Sea ABC un triángulo acutángulo y sean H_A, H_B y H_C los pies de las alturas relativas a los vértices A, B y C, respectivamente. Defina I_A, I_B y I_C como los incentros de los triángulos AH_BH_C, BH_CH_A y CH_AH_B, respectivamente. Sean T_A, T_B y T_C los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita al triángulo ABC con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Pruebe que los triángulos $I_AI_BI_C$ y $T_AT_BT_C$ son congruentes.

G6. Dado un triángulo ABC, con $1 < \frac{AB}{AC} < \frac{3}{2}$. Sean M y N puntos variables de los lados AB y AC, respectivamente, tales que $\frac{MB}{AC} - \frac{NC}{AB} = 1$. Pruebe que la circunferencia circunscrita del triángulo AMN pasa por un punto fijo distinto de A.

Teoría de Números

N1. Encuentre el mayor entero positivo n, menor que 2012, que cumpla la siguiente propiedad:

Si p es un divisor primo de n, entonces $p^2 - 1$ es un divisor de n.

N2. Halle todas las parejas de enteros positivos (m, n) tales que m tiene dos dígitos, n tiene tres dígitos, $\dfrac{mn}{m+n}$ es un número primo y, además, m y n tienen el mismo dígito de las unidades.

N3. Demuestre que no existen enteros positivos a, b, c y d, coprimos dos a dos, tales que $ab + cd$, $ac + bd$ y $ad + bc$ son divisores impares del número

$$(a + b - c - d)(a - b + c - d)(a - b - c + d).$$

N4. Pruebe que para cada entero impar $n > 1$ existen tres enteros positivos a, b, c, coprimos entre sí, tales que

$$a^2 + 2b^2 + 4c^2 = 3^n.$$

N5. Halle todos los enteros $1 < n < 2012$, para los cuales se cumple que:

$$(p(n))^2 = \sigma(n) + 423,$$

donde $p(n)$ denota el producto de todos los números primos que son divisores de n, y $\sigma(n)$ denota la suma de todos los divisores positivos de n.

Álgebra

A1. Encuentre todos las parejas (a, b) de números reales tales que:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a + b - 4} = \sqrt{ab} + 2.$$

A2. Sean x, y números reales no nulos que satisfacen la siguiente ecuación:

$$x^3 + y^3 + 3x^2y^2 = x^3y^3.$$

Determine todos los valores que puede tomar la expresión $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

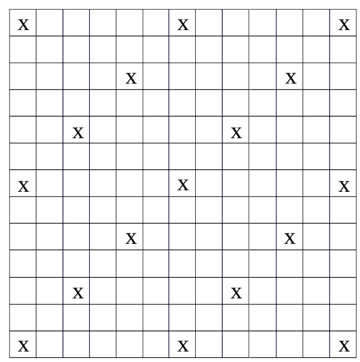
Combinatoria

C1. Anita quiere cubrir un tablero cuadriculado de 13×13 con varias tiras de papel de 2×6, de tal modo que no quede ninguna casilla sin cubrir. ¿Cuántas tiras debe usar Anita como mínimo?

Aclaración: Las tiras se pueden superponer y rotar. Cada tira debe cubrir exactamente 12 casillas del tablero.

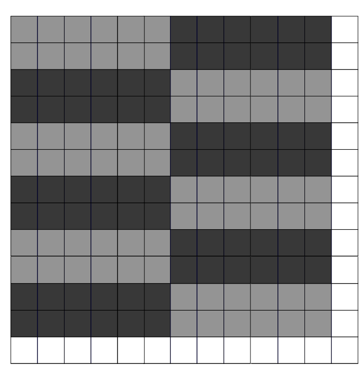
Solución

Marcamos algunas casillas del tablero de la forma mostrada: todas las casillas ubicadas en posiciones impares de una de las diagonales y, a partir de dichas casillas, toda casilla que se encuentra 6 casillas arriba o 6 casillas abajo de una casilla ya marcada.



Cada tira de papel ubicada en forma vertical cubrirá solamente una casilla marcada, pues la tira se encuentra sobre una columna par y una columna impar; la columna par no lleva ninguna casilla marcada, mientras que la mitad de la tira de papel que está sobre la columna impar solo cubrirá una casilla marcada, dado que las marcas se encuentran una cada 6 casillas. Lo mismo sucede si la tira de papel es ubicada en forma horizontal. En consecuencia, como son 17 casillas marcadas, entonces se requieren al menos 17 tiras de papel para cubrir todo el tablero de 13×13.

Si colocamos 12 tiras en la forma mostrada, cubrimos todo el tablero a excepción de 25 casillas ubicadas en la última fila y última columna



Las 25 casillas restantes pueden ser cubiertas fácilmente con 5 tiras de papel: dos en forma vertical para cubrir las primeras 12 casillas de la última columna, dos en forma horizontal para cubrir las primeras 12 casillas de la última fila, y la casilla restante puede ser cubierta con la última tira ubicada en cualquiera de las dos maneras.

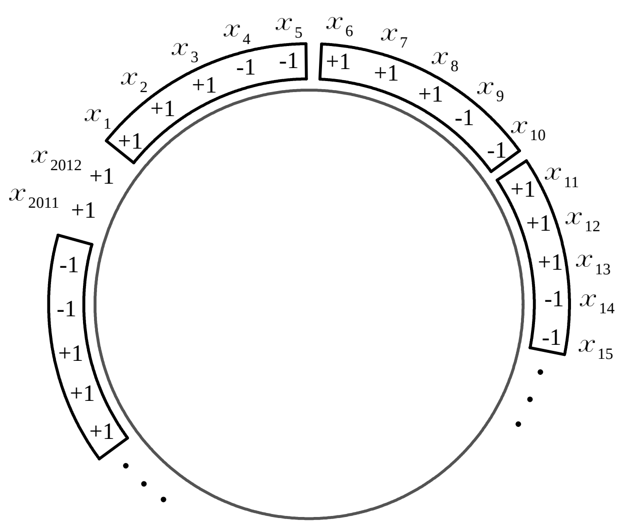
C2. Alrededor de una circunferencia están escritos 2012 números, cada uno de los cuales es igual a 1 ó -1. Si no hay 10 números consecutivos cuya suma sea 0, halle todos los valores que puede tomar la suma de los 2012 números.

Solución

A partir de alguno de los números, etiquetamos con $x_1, x_2, x_3, \ldots$ los números alrededor de la circunferencia en sentido horario, donde $x_i = x_{i+2012}$. Sean C_i los conjuntos de 10 números consecutivos comenzando en x_i, es decir, $C_i = \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+9}\}$. Además, sea S_i la suma de los 10 números en C_i y sea S la suma de los 2012 números.

Cada S_i es la suma de 10 números impares, lo cual implica que S_i es par.
De otro lado, es claro que como C_i y C_{i+1} comparten 9 números, entonces S_{i+1} es igual a $S_i - 2$, S_i ó $S_i + 2$. Si $S_i > 0$, necesariamente es mayor o igual que 2. Luego, $S_{i+1} \geq S_i - 2 \geq 0$. Pero como $S_{i+1} \neq 0$, necesariamente $S_{i+1} > 0$. Esto demuestra que todas las sumas S_i tienen el mismo signo. Analizaremos en primer lugar el caso en que cada suma S_i es mayor que cero.

Como $S_i > 0$, cualquier grupo de 10 números consecutivos puede tener a lo más cuatro números negativos. Esto implica que si dividimos el grupo de diez números en 5 parejas de números consecutivos, existe al menos una pareja que no tiene números negativos, es decir, en cualquier grupo de 10 existen dos números consecutivos positivos. Sin pérdida de generalidad, sean x_{2011} y x_{2012} dos números consecutivos positivos. El conjunto de los 2010 números restantes puede ser particionado en 201 conjuntos de 10 números consecutivos, y en cada grupo de 10 a lo más 4 son negativos, por lo tanto, la cantidad total de negativos N alrededor de la circunferencia es a lo más $201 \times 4 = 804$. Una manera de distribuir 804 números negativos de manera válida alrededor de la circunferencia es la mostrada a continuación:



En esta distribución D se aprecia que cualquier grupo de 5 números consecutivos tendrá exactamente 2 números negativos (o menos en ciertos grupos de cinco que incluyan a x_{2011} ó x_{2012}). Esto muestra que es posible tener 804 números negativos en total y sin embargo la suma de 10 cualesquiera consecutivos será siempre mayor que cero. Si en D se cambia uno cualquiera de los números negativos por un positivo, la validez de la distribución se mantiene.

Este proceso se puede repetir paso a paso hasta tener todos positivos. Por lo tanto, la suma S de todos los 2012 números se puede escribir como $S = -1(N) + 1(2012 - N)$ donde $0 \leq N \leq 804$, es decir, los valores que puede tomar S son todos los números pares desde 404 hasta 2012.

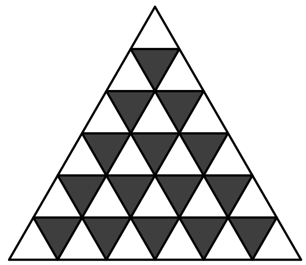
Finalmente, si consideramos que también puede ocurrir que la suma de 10 consecutivos sea siempre negativa, obtenemos que todos los valores posibles de S son:

$$-2012; -2010; -2008; \dots; -408; -406; -404; 404; 406; 408; \dots 2008; 2010; 2012$$

C3. Sea n un entero positivo par. Un triángulo equilátero de lado n se divide mediante rectas paralelas a sus lados en n^2 triangulitos equiláteros de lado 1. Demuestre que si es posible cubrir el tablero sin huecos ni superposiciones con n fichas congruentes, cada una de las cuales cubre exactamente n triangulitos del tablero, entonces n es múltiplo de 4.

Solución

Pintamos los triangulitos del tablero alternadamente de blanco y negro. La diferencia entre la cantidad de triangulitos blancos y negros del tablero es exactamente n.



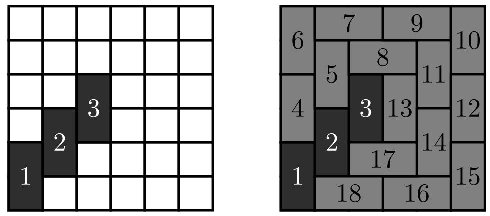
Ahora notemos que no importa como se coloque cada ficha sobre el tablero, siempre el valor absoluto de la diferencia entre la cantidad de triangulitos blancos y negros que cubra será la misma, igual a una constante entera d que solo depende de la ficha.

Así, cada ficha aporta d o $-d$ a la diferencia entre la cantidad de casillas blancas y negras del tablero, y concluimos que $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i d = n$ para algunos $\varepsilon_i \in \{-1; 1\}$. Sea $s = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$. Luego s es par, ya que s consta de una cantidad par de sumandos impares, pues n es par. Más aún, d también es par, pues es igual a la diferencia entre la cantidad de triangulitos blancos y negros que cubre cada ficha, y cada ficha cubre una cantidad par de triangulitos. De esta manera resulta que $n = sd$ es divisible por 4, como queríamos demostrar.

C4. Una *ficha de dominó* es un rectángulo de 1×2 o de 2×1. Diego juega a cubrir completamente un tablero de 6×6 usando 18 fichas de dominó. Determina el menor entero positivo k para el cual Diego puede colocar k fichas de dominó sobre el tablero (sin que se superpongan) tal que lo que queda del tablero se pueda cubrir de forma única usando las fichas de dominó restantes.

Solución

Veamos que el menor k que cumple la propiedad requerida es 3. Un ejemplo para $k = 3$ es el siguiente:



Al inicio Diego coloca las fichas 1, 2 y 3, luego, las otras fichas se colocan de forma única (siguiendo el orden $4, 5, \ldots, 18$).

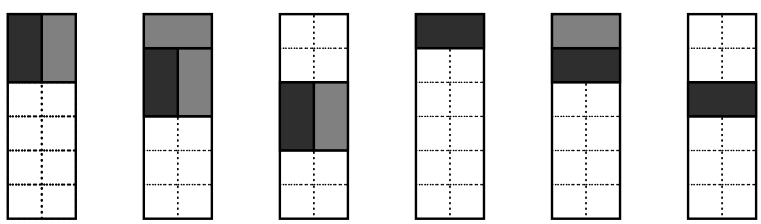
Ahora, para terminar la solución, es suficiente demostrar que colocando 2 fichas en cualquier posición el tablero puede ser completado de al menos 2 formas diferentes.

Diremos que una línea de la cuadrícula es *separadora* si divide al tablero en 2 partes tal que haya exactamente una ficha en cada parte. Es sencillo observar que para cualquier distribución de 2 fichas sobre el tablero, existe al menos una línea separadora.

Para continuar con la demostración probaremos el siguiente lema:

Lema. Si en un tablero de 2×6 colocamos una ficha de dominó, lo que queda del tablero se puede cubrir completamente con fichas de dominó de al menos 2 formas diferentes.

Prueba. En efecto, sin pérdida de generalidad, tenemos 6 posibles posiciones para la ficha inicial (negra):



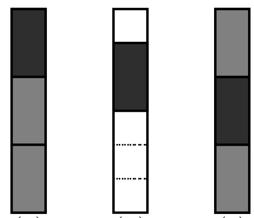
Hemos colocado algunas fichas grises y podemos observar que el resto del tablero, en cada posibilidad, se puede cubrir de al menos dos formas. $\square$

Regresando al problema, para una distribución de 2 fichas sobre el tablero, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la línea separadora es vertical. Entonces, tenemos los siguientes casos:

- Caso 1: Existe una línea separadora que divide al tablero en una parte de 2 columnas y otra de 4 columnas. En este caso, por el Lema, la parte constituida por 2 columnas, con una ficha ya colocada, se puede cubrir de al menos dos formas, mientras que la otra parte la podemos dividir en un tablero de 6×2 (el cual debe contener a la otra ficha colocada) y en dos columnas, nuevamente por el Lema, el tablero de 6×2

se puede cubrir de al menos dos formas y las dos columnas se pueden cubrir con 3 fichas verticales cada una. Por lo tanto, para este caso, existen al menos cuatro formas de cubrir todo el tablero.

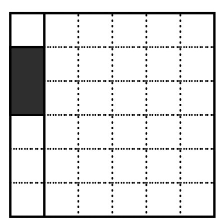
- Caso 2: Existe una línea separadora que divide al tablero en dos partes de 3 columnas cada una. Análogamente al caso anterior, dividimos cada parte en un tablero de 6×2 (el cual debe contener a una ficha ya colocada) y en una columna, por el Lema, cada parte se puede cubrir de al menos dos formas y tendríamos al menos cuatro formas de cubrir todo el tablero.
- Caso 3: Cuando no ocurre el Casi 1 ni el Caso 2. En este caso, como sabemos que existe línea separadora, esta tiene que dividir al tablero en una parte de 1 columna y otra de 5 columnas. La parte constituida por 1 columna debe contener a una ficha en vertical, hay tres posibilidades:



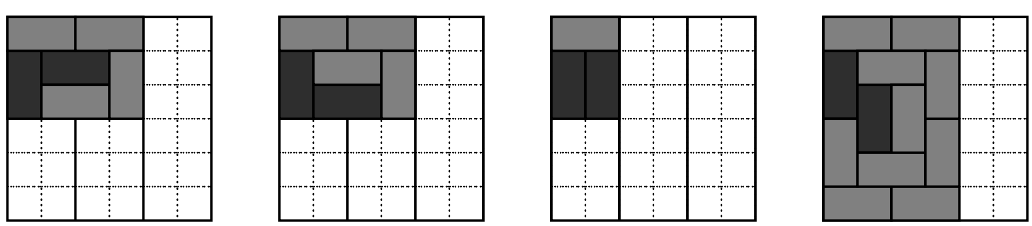
(a) (b) (c)

Como podemos observar, para los casos (a) y (c), la parte constituida por 1 columna se puede cubrir completamente, mientras que la parte constituida por 5 columnas la podemos dividir en un tablero de 6×2 (el cual debe contener a la otra ficha colocada) y en tres columnas, de forma similar a lo anterior, hay al menos dos formas de cubrir todo el tablero.

Veamos el caso (b):



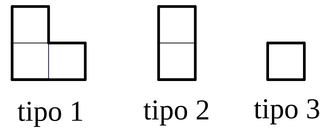
La otra ficha debe ser tangente a la línea separadora, pues de lo contrario habría una línea que separa al tablero en dos partes con al menos 2 columnas cada una, y eso contradice lo supuesto en este caso. Análogamente, la línea central horizontal no puede ser separadora. Por lo tanto, esta ficha tiene sólo 4 posibles ubicaciones:



Hemos colocado algunas fichas grises en cada posibilidad y podemos observar que siempre se puede cubrir todo el tablero de al menos dos formas.

Con esto queda demostrado que, a partir de cualquier distribución inicial de dos fichas, el tablero se puede cubrir de al menos dos formas.

C5. A y B juegan alternadamente sobre un tablero de 2012×2013 con suficientes fichas de los siguientes tipos:



En su turno, A debe colocar una ficha del tipo 1 sobre casillas vacías del tablero. B, en su turno, debe colocar exactamente una ficha de cada tipo sobre casillas vacías del tablero. Pierde el jugador que ya no puede realizar su jugada. Si empieza A, decida quién tiene una estrategia ganadora.

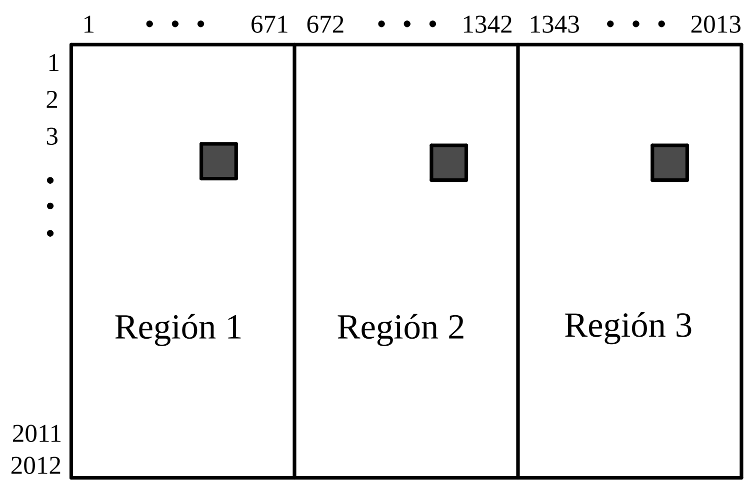
Aclaración: Las fichas se pueden rotar pero no se pueden superponer, ni salir del tablero.

Solución

Numeremos las filas del 1 al 2012 y las columnas del 1 al 2013. Cada casilla se representará entonces como el par (i, j), donde i es el número de fila y j el número de columna. Consideremos todas las ternas de casillas:

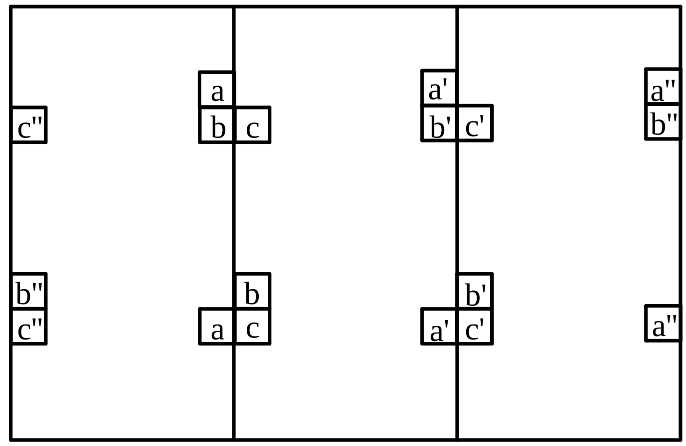
$$(i, j); \quad (i, j + 671); \quad (i, j + 1342),$$

donde $1 \leq i \leq 2012$, y $1 \leq j \leq 671$. Luego, el tablero es la unión de dichas ternas, donde los elementos de una terna pertenecen a regiones distintas, las cuales se muestran a continuación:



B tiene estrategia ganadora, jugando de la siguiente manera: Cada vez que A coloque una ficha, la cual supongamos que ocupa las casillas a, b, c, B cubre las casillas $a', b', c', a'', b'', c''$, donde (a, a', a''), (b, b', b'') y (c, c', c'') son las ternas de a, b y c, respectivamente. Es claro que ninguna de esas casillas se repite.

- Si la ficha que colocó A está en el interior de una de las regiones, entonces basta que B cubra a', b', c' con la ficha del tipo 1 y a'', b'', c'' con las fichas de los tipos 2 y 3.
- Si la ficha que colocó A está sobre la línea que separa dos regiones consecutivas, entonces basta que B cubra a', b', c' con la ficha del tipo 1, uno o dos casillas de a'', b'', c'' con una de las fichas 2 ó 3 y la/las casillas restantes con la ficha restante.



De este modo después de que B juegue su turno, cada terna de casillas estarán o todas cubiertas o todas vacías, además, cada vez que A realiza una jugada, B garantiza la suya. Finalmente al ser un juego finito, el perdedor sólo puede ser A, por lo tanto B gana.

Geometría

G1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sea P la intersección de las rectas BC y AD. La recta AC corta a la circunferencia circunscrita del triángulo BDP en S y T, con S entre A y C. La recta BD corta a la circunferencia circunscrita del triángulo ACP en U y V, con U entre B y D. Demuestre que $PS = PT = PU = PV$.

Solución 1

Primero, denotemos $\angle PAT = \angle CAD = \angle CBD = \angle PBV = \alpha$. Como el cuadrilátero $TPBD$ es cíclico, entonces $\angle PTD = \angle PBV = \alpha$. Luego $\angle PTA = \angle PDT = \angle PST$, entonces $PS = PT$. Análogamente $PU = PV$.

Ahora, notemos que los triángulos APT y TPD son semejantes, entonces

$$\frac{PD}{PT} = \frac{PT}{PA} \Rightarrow PT^2 = PD \cdot PA.$$

Trabajando del mismo modo se llega a que $PV^2 = PB \cdot PC$. Como el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, entonces $PA \cdot PD = PB \cdot PC \Rightarrow PT^2 = PV^2 \Rightarrow PT = PU$, de donde $PS = PT = PU = PV$.

Solución 2

Igual que en la primera solución llegamos a que $PS = PT$ y $PU = PV$.

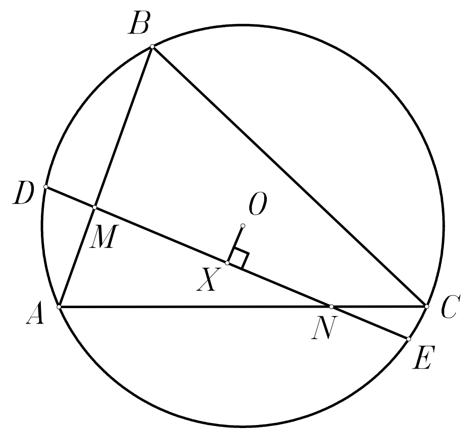
Sea X el punto de intersección de AC y BD. Por teorema de las cuerdas: $TX \cdot XS = DX \cdot XB = AX \cdot XC = UX \cdot XV$, entonces el cuadrilátero $TUSV$ es cíclico. Luego, como P se encuentra en la mediatriz de TS y UV, entonces P es el centro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero $TUSV$, es decir, $PT = PS = PU = PV$.

G2. Dado un triángulo ABC, sean M y N puntos variables de los lados AB y AC, respectivamente, tales que ni M ni N coinciden con los vértices y, además, $AM \cdot MB = AN \cdot NC$. Pruebe que la mediatriz del segmento MN pasa por un punto fijo.

Solución 1

Demostraremos que la mediatriz de MN siempre pasa por el circuncentro de ABC. Supongamos que la recta MN corta a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en los puntos D y E (con M entre D y N). Luego, por el Teorema de las cuerdas: $AM \cdot MB = DN \cdot ME$ y $AN \cdot NC = DN \cdot NE$, entonces

$$DM \cdot ME = DN \cdot NE \implies DM(MN+NE) = (DM+MN)NE \implies DM = NE.$$



Sea O el circuncentro de ABC. Si X es el pie de la perpendicular trazada de O a la cuerda DE, entonces $DX = XE$. Además, como $DM = NE$, se tiene que $MX = XN$, es decir, O está en la mediatriz de MN.

Solución 2

Sea O el circuncentro del triángulo ABC. Aplicando el siguiente lema a los triángulo isósceles AOB y AOC se demuestra directamente que $OM = ON$, es decir que la mediatriz de MN pasa por O.

Lema. Si ABC es un triángulo con $AB = BC$, y M es un punto de AC, entonces $AB^2 = BM^2 + AM \cdot MC$.

Prueba 1. Sea X el punto medio de AC, entonces por el teorema de pitágoras se tiene que $BM^2 = BX^2 + MX^2$, entonces

$$\begin{aligned} BM^2 &= (BC^2 - \left(\frac{AM+MC}{2}\right)^2) + \left(\frac{MC-AM}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow BM^2 &= BC^2 - AM \cdot MC. \end{aligned}$$

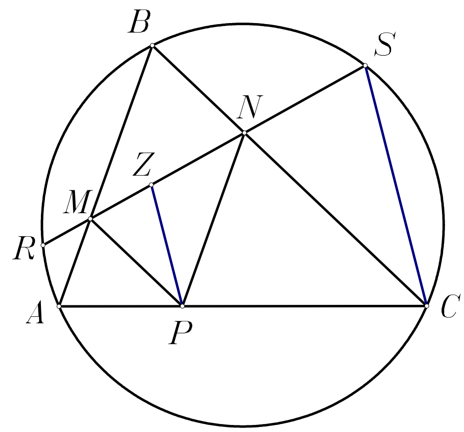
Prueba 2. Sea S la circunferencia de centro B y radio $R = AB$. Supongamos que la recta BM corta a S en los puntos D y E (con M entre B y D). Por el teorema de las cuerdas: $AM \cdot MC = DX \cdot XE = (R - BM)(R + BM) = R^2 - BM^2 \Rightarrow AB^2 = BM^2 + AM \cdot MC$.

Comentario: No es difícil determinar el punto fijo del siguiente modo: cuando M tiende a ser A o B, entonces N tiende a ser A o C, es decir las mediatrices de MN tienden a ser las mediatrices de AB, BC y AC, las cuales se intersectan en el circuncentro (que sería el punto fijo).

G3. Dado un triángulo ABC, sean M, N y P puntos de los lados AB, BC y CA, respectivamente, tales que $MBNP$ es un paralelogramo. La recta MN corta a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en los puntos R y S. Pruebe que la circunferencia circunscrita del triángulo RPS es tangente a AC.

Solución 1

Supongamos que M se encuentra entre R y N. Entonces, basta demostrar que $\angle RPA = \angle RSP$. Supongamos que la recta paralela a CS que pasa por P corta a MS en el punto Z. Como $AM||NP$, $MP||NC$ y $PZ||CS$, entonces los triángulos AMP y PNC son semejantes, al igual que los triángulos MPZ y NCS.

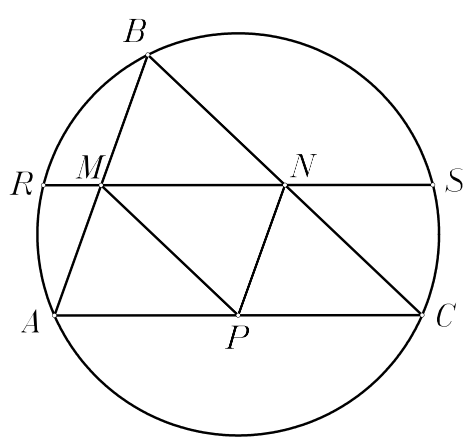


Luego, como $\dfrac{MA}{NP} = \dfrac{MP}{NC} = \dfrac{MZ}{NS}$ y $\angle AMZ = \angle PNS$, entonces los triángulos AMZ y PNS son semejantes, de donde $\angle RZA = \angle RSP$.

Por otro lado, sabemos que $\angle ARZ + \angle APZ = \angle ARZ + \angle ACS = 180°$, entonces el cuadrilátero $ARZP$ es cíclico, de donde $\angle RZA = \angle RPA$, por lo cual $\angle RPA = \angle RSP$, que es lo que queremos.

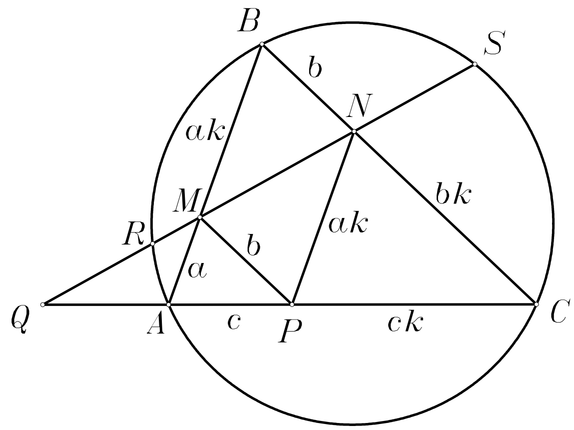
Solución 2

Si la recta MN es paralela al lado AC, entonces, como MN y BP se cortan en sus puntos medios, entonces M, N y P serían los puntos medios de los lados AB, BC y CA, respectivamente, además, $ARSC$ sería un trapecio isósceles. Como P es punto medio de AC, $\angle RPA = \angle PRS = \angle RSP$, y esto implica que la circunferencia circunscrita al RPS es tangente a AC en P.



Si las rectas MN y AC se cortan en Q (sin pérdida de generalidad, con A entre Q y C), lo que nos pide el problema equivale a decir $QP^2 = QR \cdot QS$, y como se cumple que $QR \cdot QS = QA \cdot QC$, tendríamos que demostrar que $QP^2 = QA \cdot QC$.

Como los triángulos AMP y PNC son semejantes, sean $AM = a$, $MP = b$, $AP = c$, $NP = ak$, $NC = bk$ y $PC = ck$, entonces, $MB = ak$ y $BN = b$.



Por el Teorema de Menelao en el triángulo ABC, respecto de la transversal QMN, tenemos

$$CN \cdot BM \cdot QA = BN \cdot AM \cdot QC,$$

y reemplazando obtenemos:

$$(bk)(ak)QA = (b)(a)(QA+c+ck) \quad \Longrightarrow \quad QA(k^2-1) = c(k+1) \quad \Longrightarrow \quad QA = \frac{c}{k-1}.$$

Luego:

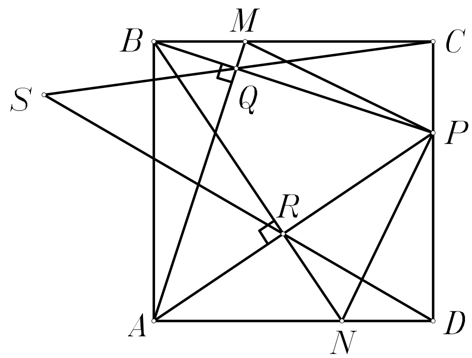
$$QP^2 = QA \cdot QC \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{c}{k-1} + c\right)^2 = \frac{c}{k-1}\left(\frac{c}{k-1} + ck + c\right),$$

y es fácil comprobar que la última igualdad es cierta.

G4. Sea P un punto del lado CD de un cuadrado $ABCD$. En el triángulo ABP se trazan las alturas AQ y BR, con Q en el segmento BP y R en el segmento AP. Sea S el punto de intersección de las rectas CQ y DR, demuestre que $\angle ASB = 90°$.

Solución 1

Supongamos que las prolongaciones de AQ y BR cortan a los lados BC y DA en los puntos M y N respectivamente. Entonces como $\angle BAM = \angle CBP$ y $\angle ABN = \angle DAP$, entonces los triángulos BAM y CBP son congruentes, al igual que los triángulos ABN y DAP. Luego $BM = CP$ y $AN = DP$, de donde $CP = DN$ y $MC = PD$, por lo cual los triángulos MCP y PDN son congruentes, entonces $\angle MPN = 90°$.



Por otro lado, $\angle CSD = \angle BCQ + \angle ADR$ y como los cuadriláteros $QMCP$ y $RNDP$ son cíclicos, entonces $\angle MCQ = \angle MPQ$ y $\angle RDN = \angle RPN$, de donde

$$\angle CSD = \angle MPQ + \angle RPN = 90° - \angle BPA \quad \Longrightarrow \quad \angle QSR = \angle RBQ = \angle RAQ,$$

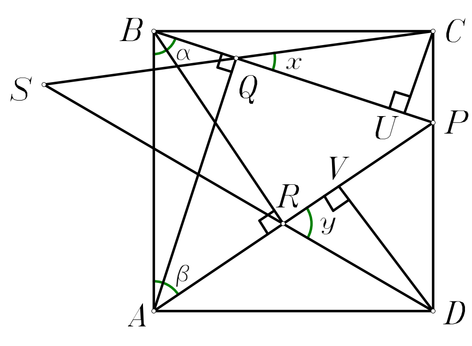
lo cual implica que los puntos S, B, Q, R y A están en la circunferencia de diámetro AB. Por lo tanto, $\angle ASB = 90°$.

Solución 2

Sean $\alpha = \angle PBA$, $\beta = \angle BAP$, $\angle CQP = x$ y $\angle DRP = y$. Completando ángulos llegamos a que $\angle QCB = x + \alpha - 90°$ y $\angle RDA = y + \beta - 90°$, y luego $\angle CSD = x + y + \alpha + \beta - 180°$. Por otro lado, es claro que $\angle PBR = \alpha + \beta - 90°$. Luego, para que S pertenezca a la circunferencia de diámetro AB (que es lo que necesitamos), es suficiente probar que

$$\angle QSR = \angle QBR \quad \Longleftrightarrow \quad x + y + \alpha + \beta - 180° = \alpha + \beta - 90° \quad \Longleftrightarrow \quad x + y = 90°.$$

Ahora, en los triángulos BCP y ADP trazamos las alturas CU y DV, respectivamente.



Si suponemos que el lado del cuadrado es 1, entonces $BQ = \cos\alpha$ y como $\angle BCU = \alpha$, entonces $CU = \cos\alpha$ y $BU = \operatorname{sen}\alpha$, luego:

$$\cot x = \frac{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha - 1, \tag{1}$$

y análogamente:

$$\cot y = \tan\beta - 1. \tag{2}$$

Por otro lado, $1 = CP + PD$, $CP = \cot\alpha$ y $PD = \cot\beta$, luego:

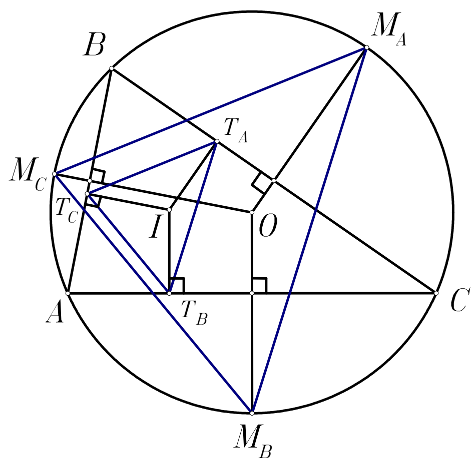
$$1 = \cot\alpha + \cot\beta \tag{3}$$

Como x y y son agudos, a partir de (1), (2) y (3) es fácil demostrar que $x + y = 90°$, que es lo que queríamos.

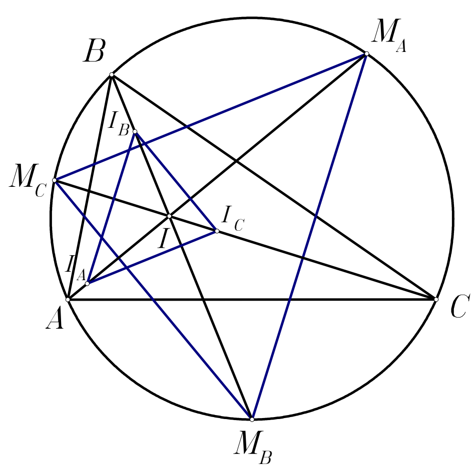
G5. Sea ABC un triángulo acutángulo y sean H_A, H_B y H_C los pies de las alturas relativas a los vértices A, B y C, respectivamente. Defina I_A, I_B y I_C como los incentros de los triángulos AH_BH_C, BH_CH_A y CH_AH_B, respectivamente. Sean T_A, T_B y T_C los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita al triángulo ABC con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Probar que los triángulos $I_AI_BI_C$ y $T_AT_BT_C$ son congruentes.

Solución

Sean O el circuncentro del triángulo ABC, M_A, M_B y M_C los puntos medios de los arcos menores BC, CA y AB de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, respectivamente; r y R el inradio y circunradio del triángulo ABC respectivamente. Se sabe que los segmentos IT_A y OM_A son perpendiculares al lado BC, entonces $IT_A||OM_A$, de igual manera, $IT_B||OM_B$, además, $IT_A = IT_B = r$ y $OMA = OM_B = R$, entonces $T_AT_B||M_AM_B$ y $\dfrac{T_AT_B}{M_AM_B} = \dfrac{r}{R}$. Análogamente $T_BT_C||M_BM_C$ y $T_CT_A||M_CM_A$, entonces los triángulos $T_AT_BT_C$ y $M_AM_BM_C$ son homotéticos con razón $\frac{r}{R}$.



Por otro lado, Se sabe que los triángulos AH_BH_C y ABC son semejantes, entonces $\dfrac{AI_A}{AI} = \dfrac{AH_C}{AC} = \cos A \Rightarrow AI_A = AI\cos A \Rightarrow I_AI = AI(1 - \cos A)$, además, $AI = r\csc\frac{A}{2} \Rightarrow I_AI = r\csc\frac{A}{2}(1-\cos A) = r\csc\frac{A}{2}(2\operatorname{sen}^2\frac{A}{2}) \Rightarrow I_AI = 2r\operatorname{sen}\frac{A}{2}$.



Luego, como $IM_A = BM_A = CM_A \Rightarrow IM_A = 2R \operatorname{sen} \frac{A}{2}$, entonces $\dfrac{I_A I}{IM_A} = \dfrac{2r \operatorname{sen} \frac{A}{2}}{2R \operatorname{sen} \frac{A}{2}} = \dfrac{r}{R}$. Análogamente: $\dfrac{I_B I}{IM_B} = \dfrac{r}{R}$ y $\dfrac{I_C I}{IM_C} = \dfrac{r}{R}$, entonces los triángulos $I_A I_B I_C$ y $M_A M_B M_C$ son homotéticos (con centro en I) con razón $\frac{r}{R}$.

Finalmente, de las dos homotecias establecidas, los triángulos $T_A T_B T_C$ e $I_A I_B I_C$ son congruentes.

G6. Dado un triángulo ABC, con $1 < \frac{AB}{AC} < \frac{3}{2}$. Sean M y N puntos variables de los lados AB y AC, respectivamente, tales que $\frac{MB}{AC} - \frac{NC}{AB} = 1$. Pruebe que la circunferencia circunscrita del triángulo AMN pasa por un punto fijo distinto de A.

Solución

Sea $S(O,r)$ la circunferencia circunscrita al triángulo AMN. De $\dfrac{MB}{AC} - \dfrac{NC}{AB} = 1$ se tiene que $MB \cdot AB - NC \cdot AC = AB \cdot AC$. Como $BM \cdot BA = BO^2 - r^2$ y $CN \cdot CA = CO^2 - r^2$, entonces $BO^2 - CO^2 = AB \cdot AC$ es constante. Fijemos este punto O y consideremos otros puntos M y N con la misma propiedad y sea O' el ciruncentro del nuevo triángulo AMN, luego, se tendría que $BO'^2 - CO'^2 = BO^2 - CO^2$, entonces las rectas OO' y BC deben ser perpendiculares, es decir el punto O' pertenece a la recta perpendicular a BC que pasa por O, la cual es una recta fija a la cual llamaremos L.

Sea A' el simétrico de A respecto a la recta L, entonces como O' siempre está en L, entonces $O'A = O'A'$, es decir A' siempre está en la circunferencia circunscrita del triángulo AMN. Si $A' = A$, entonces A estaría en la recta L, entonces $BA^2 - AC^2 = BO'^2 - CO'^2 = AB \cdot AC \Rightarrow AB^2 - AB \cdot AC - AC^2 = 0 \Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} < \dfrac{3}{2}$, contradicción.

Por lo tanto, la circunferencia circunscrita al triángulo AMN pasa siempre por el punto fijo $A' \neq A$.

Teoría de Números

N1. Encuentre el mayor entero positivo n, menor que 2012, que cumpla la siguiente propiedad:

$$\text{Si } p \text{ es un divisor primo de } n, \text{ entonces } p^2 - 1 \text{ es un divisor de } n.$$

Solución
Llamemos $\mathcal{P}(k)$ a la propiedad que garantiza que si k es factor primo de n, entonces $k^2 - 1$ divide a n.
El número n no puede tener como único factor primo a 2, pues $\mathcal{P}(2)$ implica que $3|n$. En consecuencia, existe algún primo impar r que divide a n. Como $r^2 - 1$ es múltiplo de 4, $\mathcal{P}(r)$ implica que $4|n$. Luego, como $2|n$, $\mathcal{P}(2)$ implica que $3|n$. De otro lado, $\mathcal{P}(3)$ implica que $8|n$. En consecuencia, $24|n$.

Los mayores múltiplos de 24 menores a 2012 son $1992, 1968, 1944, \ldots$. El número $1992 = 83 \times 24$ no satisface el problema pues $\mathcal{P}(83)$ implicaría que $6888|n$. El número $1968 = 82 \times 24$ no satisface el problema pues $\mathcal{P}(41)$ implicaría que $1680|n$. Finalmente, el número buscado es $1944 = 2^3 \times 3^5$, que satisface todas las condiciones del problema.

N2. Halle todas las parejas de enteros positivos (m, n) tales que m tiene dos dígitos, n tiene tres dígitos, $\dfrac{mn}{m+n}$ es un número primo y, además, m y n tienen el mismo dígito de las unidades.

Solución

Sea $\dfrac{mn}{m+n} = p$, donde p es un número primo. Al desarrollar obtenemos:

$$mn = pm + pn \quad \Longleftrightarrow \quad m(n-p) = pn \quad \Longleftrightarrow \quad m(n-p) = p(n-p) + p^2,$$

de donde obtenemos:

$$(m-p)(n-p) = p^2.$$

Luego, $(m-p)$ es un divisor entero de p^2. Si $(m-p) = -p^2$, tendríamos que m es negativo, lo cual no es posible. Análogamente, es fácil demostrar que $(m-p)$ no puede ser ni $-p$, ni tampoco -1. Ahora, teniendo en cuenta que $m < n$, de los casos que quedan por analizar, solamente tendríamos la opción $(m-p) = 1$ y $(n-p) = p^2$. Es decir, $m = p+1$ y $n = p(p+1)$.

Como m y n tienen el mismo dígito de las unidades, entonces $n-m$ es múltiplo de 10. Pero $n - m = (p+1)(p-1) = p^2 - 1$, entonces el dígito de las unidades de p^2 es 1, luego, el dígito de las unidades de p es 1 ó 9.

Por otro lado, como n tiene tres dígitos, tenemos la desigualdad $n = p(p+1) \leq 999$, de donde obtenemos que $p \leq 31$. Luego, los posibles valores de p son $\{11, 19, 29, 31\}$.

- Si $p = 11$, tenemos la pareja $(m, n) = (12, 132)$.
- Si $p = 19$, tenemos la pareja $(m, n) = (20, 380)$.
- Si $p = 29$, tenemos la pareja $(m, n) = (30, 870)$.
- Si $p = 31$, tenemos la pareja $(m, n) = (32, 992)$.

Hay 4 parejas en total.

N3. Demuestre que no existen enteros positivos a, b, c y d, coprimos dos a dos, tales que $ab + cd$, $ac + bd$ y $ad + bc$ son divisores impares del número

$$(a + b - c - d)(a - b + c - d)(a - b - c + d).$$

Solución

Supongamos que existen tales a, b, c, d y sea $P = (a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.

Notemos en primer lugar que el problema es simétrico respecto de a, b, c, d. En efecto, al intercambiar cualesquiera dos de las variables a, b, c, d, no cambia $|P|$ ni tampoco los tres números $ab + cd$, $ac + bd$ y $ad + bc$.

Afirmamos que $ab+cd$, $ac+bd$ y $ad+bc$ son coprimos dos a dos. Para ello, supongamos lo contrario y sea p un primo que divide sin pérdida de generalidad (por simetría) a $ac + bd$ y $ad + bc$; p es impar. Tenemos que

$$p|(ac+bd) + (ad+bc) = (a+b)(c+d) \qquad \text{y} \qquad p|(ac+bd) - (ad+bc) = (a-b)(c-d)$$

Si $p|a + b$ y $p|a - b$, luego $p|(a + b) + (a - b) = 2a$ y $p|(a + b) - (a - b) = 2b$. Pero a y b son coprimos, luego $p = 2$, contradicción. Lo mismo sucede si $p|c + d$ y $p|c - d$. Por lo tanto, p debe dividir a $a + b$ y $c - d$ o a $a - b$ y $c + d$. Supongamos el primer caso; el segundo es análogo. Como $p|P$ resulta que

$$P = (a + b - c - d)(a - b + c - d)(a - b - c + d) \equiv (-c - d)(a - b)(a - b) \equiv 0 (\text{mód } p)$$

En consecuencia, $p|c + d$ o $p|a - b$. Pero entonces volvemos a tener $p|a + b$, $p|a - b$ o $p|c+d$, $p|c-d$, que nos lleva a $p = 2$, contradicción. Así concluimos que $ab+cd$, $ac+bd$ y $ad + bc$ son coprimos dos a dos.

Pero ahora, por ser $ab + cd$, $ac + bd$ y $ad + bc$ divisores de P coprimos dos a dos, su producto Q debe dividir a P, $Q|P$. Sin embargo, es fácil ver que $ab+cd > |a+b-c-d|$ y así cíclicamente con $ac+bd$ y $ad+bc$. En efecto, si asumimos sin pérdida de generalidad $a + b \geq c + d$ luego

$$ab+cd-|a+b-c-d| = ab+cd-a-b+c+d = (a-1)(b-1)+((c+1)(d+1)-2) > 0$$

Así, $|P| < |Q|$ y como P es impar, ya que para que $ab+cd$, $ac+bd$ y $ad+bc$ sean impares, exactamente uno de a, b, c, d debe ser par, concluimos que $0 < |P| < |Q|$, contradicción.

N4. Pruebe que para cada entero impar $n > 1$ existen tres enteros positivos a, b, c, coprimos entre sí, tales que

$$a^2 + 2b^2 + 4c^2 = 3^n.$$

Solución

Sea $n = 2k + 1$. Hacemos $a = 3^k$, entonces $3^{2k} + 2(b^2 + 2c^2) = 3^{2k+1} \Rightarrow b^2 + 2c^2 = 3^{2k}$. Demostraremos por inducción que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ existen $b_n, c_n \in \mathbb{Z}^+$, coprimos, tales que $b_n^2 + 2c_n^2 = 3^n$. Empecemos con $b_1 = c_1 = 1$, $b_2 = 1, c_2 = 2$. Supongamos que para cierto $n \in \mathbb{Z}^+$, con $n \geq 2$, existen los coprimos $b_n, c_n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $b_n^2 + 2c_n^2 = 3^n$, entonces

$$(b_n - 2c_n)^2 + 2(b_n + c_n)^2 = 3^{n+1},$$
$$(b_n + 2c_n)^2 + 2(b_n - c_n)^2 = 3^{n+1}.$$

Entonces podemos tomar:

$$(b_{n+1} = |b_n - 2c_n|, \quad c_{n+1} = b_n + c_n) \quad o \quad (b_{n+1} = b_n + 2c_n, \quad c_{n+1} = |b_n - c_n|).$$

Si $b_n = 2c_n$, obtenemos $6c_n^2 = 3^n$, que no es posible porque el lado izquierdo es par mientras que el derecho impar. Si $b_n = c_n$, entonces $b_n = c_n = 1$ porque son coprimos, luego, $3 = 3^n$, pero hemos considerado $n \geq 2$. Esto nos indica que b_{n+1} y c_{n+1} siempre son enteros positivos.

Si existe $d \in \mathbb{Z}^+$ tal que $d|b_n - 2c_n$ y $d|b_n + c_n$ o $d|b_n + 2c_n$ y $d|b_n - c_n$, entonces $d|3b_n$ y $d|3c_n$, de donde $d|3$. Sin embargo, si $3|b_n + c_n$ y $3|b_n - c_n$, entonces b_n y c_n no serían coprimos. Por lo tanto alguno de los pares (b_{n+1}, c_{n+1}) cumple que b_{n+1} y c_{n+1} son coprimos.

Finalmente, para $n = 2k + 1$ basta tomar $a = 3^k$, $b = b_{2k}$ y $c = c_{2k}$, donde es claro que cada par de ellos son coprimos.

N5. Halle todos los enteros $1 < n < 2012$, para los cuales se cumple que:

$$(p(n))^2 = \sigma(n) + 423,$$

donde $p(n)$ denota el producto de todos los números primos que son divisores de n, y $\sigma(n)$ denota la suma de todos los divisores positivos de n.

Solución

Sea $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$ la descomposición canónica de n, donde los exponentes a_i son positivos.

Tenemos que $p(n) = \prod_{i=1}^{k} p_i$ y $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} s_i$, donde $s_i = 1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{a_i}$.

Tenemos que:

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^2 = (p(n))^2 > \sigma(n) > n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i},$$

luego, algún a_i es menor que 2. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a_1 = 1$.

Primer Caso: $p_1 = 2$.

Tenemos $s_1 = 1 + 2 = 3$, luego $\sigma(n) = 3\prod_{i\neq 1} s_i$ es múltiplo de 3 y como 423 también es múltiplo de 3, entonces $p(n)$ es múltiplo de 3. Luego, podemos asumir que $p_2 = 3$. Como $p(n)$ es par, entonces $\sigma(n)$ es impar, con lo cual cada $s_i = 1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{a_i}$ es impar. Para $i \geq 2$ el número p_i es impar, entonces a_i es par (en particular $a_i \geq 2$). Luego:

$$\sigma(n) \geq (1+2)(1+3+3^2)\prod_{i\neq 1,2}(1 + p_i + p_i^2) \implies \sigma(n) \geq 39\prod_{i\neq 1,2} p_i^2, \tag{1}$$

y por otro lado:

$$(p(n))^2 = (2^2)(3^2)\prod_{i\neq 1,2} p_i^2 = 36\prod_{i\neq 1,2} p_i^2 \tag{2}$$

A partir de (1) y (2), notamos que no es posible que se dé la igualdad $(p(n))^2 = \sigma(n) + 423$.

Segundo Caso: $p_1 > 2$.

Tenemos que p_1 es impar, luego, $s_1 = 1 + p_1$ es par y en consecuencia $\sigma(n)$ es par.

Como $(p(n))^2 = \sigma(n) + 423$, entonces $p(n)$ es impar y esto implica que todos los p_i son impares. Como $p(n)$ es impar, entonces $(p(n))^2 \equiv 1 (\text{mód } 4)$, luego, tenemos que $\sigma(n) \equiv 1 - 423 \equiv 2 (\text{mód } 4)$.

Ahora, si existe algún $a_i = 1$ $(i \neq 1)$, podemos asumir que $i = 2$, entonces $s_2 = 1 + p_2$ también es par, luego, $\sigma(n) = s_1 s_2 \prod_{i\neq 1,2} s_i$ es múltiplo de 4, lo cual es una contradicción.

Concluimos que $a_i > 1$ para todo $i \neq 1$.

Si $p_1 \equiv 3 (\text{mód } 4)$ entonces $s_1 = 1 + p_1 \equiv 0 (\text{mód } 4)$, y esto implica que $\sigma(n)$ es múltiplo de 4, lo cual es una contradicción. Concluimos que $p_1 \equiv 1 (\text{mód } 4)$ y los posibles valores de p_1 son:

$$p_1 \in \{5, 13, 17, 29, \dots\}$$

Analicemos ahora, según los valores de k (tendremos en cuenta que $a_1 = 1$):

- Si $k = 3$, tenemos $n = p_1 p_2^{a_2} p_3^{a_3}$, y tenemos dos casos:
  - $p_1 = 5$: $n = p_1 p_2^{a_2} p_3^{a_3} \geq 5 p_2^{a_2} p_3^{a_3} \geq 5 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = 2205$.
  - $p_1 \geq 13$: $n = p_1 p_2^{a_2} p_3^{a_3} \geq 13 p_2^{a_2} p_3^{a_3} \geq 13 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 2925$.

  En ninguno de estos casos hay solución porque $n < 2012$.
- Si $k = 1$, tenemos $n = p_1$, pero es fácil comprobar que no hay solución.
- Si $k = 2$, tenemos $n = p_1 p_2^{a_2}$, $\sigma(n) = s_1 s_2 \equiv 2 (\text{mód } 4)$ y $s_1 \equiv 2 (\text{mód } 4)$ entonces $s_2 = 1 + p_2 + \cdots + p_2^{a_2}$ es impar, luego, a_2 es par.
  Ahora, $2012 > n = p_1 p_2^{a_2} \geq 5 \cdot 3^{a_2}$, de donde a_2 es igual a 2 ó 4.
  - Si $a_2 = 2$, $n = p_1 p_2^{a_2}$ y reemplazando en la ecuación inicial:

    $$p_1^2 p_2^2 = (1 + p_1)(1 + p_2 + p_2^2) + 423,$$

    donde $p_1 \geq 5$ y $p_2 \geq 3$, luego:

    $$p_1 = \left(1 + \frac{1}{p_1}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2}\right) + \frac{423}{p_1 p_2^2} \leq \left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{423}{5 \cdot 3^2} < 12,$$

    por lo tanto $p_1 = 5$ y la ecuación quedaría así:

    $$25 p_2^2 = 6(1 + p_2 + p_2^2) + 423,$$

    y viendo esa ecuación módulo 3, concluimos que p_2 es múltiplo de 3, es decir, $p_2 = 3$. Pero al reemplazar estos valores de p_1 y p_2, no cumplen la ecuación.
  - Si $a_2 = 4$, $n = p_1 p_2^4$, luego $2012 > n = p_1 p_2^4 \geq 5 p_2^4$, de donde podemos concluir que $p_2 < 5$. Por lo tanto, $p_2 = 3$ y al reemplazar obtenemos:

    $$9 p_1^2 = (1 + p_1)(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 423 = 121(1 + p_1) + 423,$$

    simplificando obtenemos $p_1(9p_1 - 121) = 2^5 \cdot 17$. Como p_1 es un número primo impar, tenemos que $p_1 = 17$ y reemplazando sí cumple la ecuación.

  En este caso tenemos la única solución $n = 17 \cdot 3^4 = 1377$.

Hemos demostrado que la ecuación inicial tiene sólo una solución, $n = 1377$.

Álgebra

A1. Encuentre todos las parejas (a, b) de números reales tales que:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b-4}=\sqrt{ab}+2.$$

Solución
Las raíces $\sqrt{a}$ y $\sqrt{b}$ requieren que $a \geq 0$ y $b \geq 0$.
Sea x el número definido como $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b-4}$. Luego,

$$x\left(\sqrt{ab}+2\right)=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a+b-4}\right)\left((\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b-4}\right)$$

$$x\left(\sqrt{ab}+2\right)=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{a+b-4}\right)^2$$

$$x\left(\sqrt{ab}+2\right)=2\sqrt{ab}+4$$

Como $\sqrt{ab}+2>0$, se concluye que $x=2$. Entonces, de la definición de x:

$$2+\sqrt{a+b-4}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Luego,

$$\left(2+\sqrt{a+b-4}\right)^2=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$$

De donde,

$$2\sqrt{a+b-4}=\sqrt{ab}$$

De aquí,

$$\left(2\sqrt{a+b-4}\right)^2=\left(\sqrt{ab}\right)^2$$

$$4a+4b-16=ab$$

$$0=(a-4)(b-4)$$

Esto implica que $a=4 \vee b=4$. Se verifica que en cualquiera de estos casos la igualdad es válida. Finalmente, los pares ordenados $(k;4)$ y $(4;k)$ son los que satisfacen la ecuación, para todo $k \geq 0$.

A2. Sean x, y números reales no nulos que satisfacen la siguiente ecuación:

$$x^3 + y^3 + 3x^2y^2 = x^3y^3.$$

Determine todos los valores que puede tomar la expresión $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

Solución 1

Sean $x + y = s$ y $xy = p$. A partir de la desigualdad $(x - y)^2 \geq 0$, obtenemos:

$$s^2 \geq 4p, \tag{1}$$

donde la igualdad ocurre si y sólo si $x = y$.

Por otro lado:

$$(x + y)^3 = s^3 \iff x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = s^3 \iff x^3 + y^3 = s^3 - 3sp.$$

Reemplazando en la ecuación del enunciado obtenemos:

$$(s^3-3sp)+3p^2 = p^3 \iff s^3-p^3 = 3p(s-p) \iff (s-p)(s^2+sp+p^2) = 3p(s-p).$$

Tenemos dos casos por analizar:

- Primer caso: $(s - p) = 0$. Tenemos que $x + y = xy$, con lo cual $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$.
- Segundo caso: $s^2 + sp + p^2 = 3p$. Con el objetivo de formar cuadrados expresamos $s^2 = \frac{s^2}{4} + \frac{3s^2}{4}$, luego:

  $$\frac{s^2}{4} + sp + p^2 + \frac{3s^2}{4} - 3p = 0 \iff \left(\frac{s}{2} + p\right)^2 + \frac{3}{4}(s^2 - 4p) = 0,$$

  sabemos que en la última expresión los dos sumandos de la izquierda son mayores o iguales que cero, entonces, la única forma que se dé la igualdad es que $\left(\frac{s}{2} + p\right) = 0$ y $s^2 = 4p$. Pero ya vimos que (1) ocurre solamente cuando $x = y$, entonces $s = 2x$ y $p = x^2$, y como $\left(\frac{s}{2} + p\right) = 0$ obtenemos:

  $$\left(\frac{s}{2} + p\right) = x + x^2 = 0 \implies x \in \{-1, 0\}.$$

  Como x es no nulo concluimos que $x = y = -1$, con lo cual $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -2$.

Por lo tanto, la expresión $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ toma dos valores: 1 y -2.

Solución 2

(Resumida) Para otra solución, se podría usar el siguiente Lema:

Lema: Si a, b, c son números reales tales que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, entonces $a + b + c = 0$ ó $a = b = c$.

Prueba: Basta usar la identidad de Gauss en la siguiente forma:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\left(\frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2}\right),$$

notemos que el segundo factor del lado derecho es igual a 0 si y sólo si $a = b = c$. $\square$

Para terminar la solución basta notar que la ecuación del enunciado se puede expresar así:

$$x^3 + y^3 + (-xy)^3 = 3xy(-xy)$$