Sociedad Matemática Peruana

X Olimpiada Nacional Escolar de Matemática (ONEM 2013)

Cuarta Fase - Nivel 2

17 de noviembre de 2013

Estimado estudiante, recibe por parte del equipo encargado de la organización las felicitaciones por estar participando en la etapa final de la Olimpiada Nacional Escolar de Matemática. Te recomendamos tener en consideración lo siguiente:

- La prueba tiene una duración máxima de 4 horas.
- En la primera media hora puedes hacer preguntas, por escrito, en caso tengas alguna duda acerca de los enunciados de los problemas; luego de ese tiempo no se recibirá más preguntas.
- No está permitido usar calculadoras, ni consultar apuntes o libros.
- Resuelve los problemas propuestos **justificando adecuadamente cada paso**.
- Entrega solamente el cuadernillo de soluciones.
- Cada problema tiene un valor máximo de **25 puntos**.

---

1. En un juego hay 3 cajas cerradas, cada una de las cajas contiene 20 bolitas, pero no se sabe con exactitud el contenido de cada caja. Solo sabemos que una de las cajas contiene 10 bolitas blancas y 10 bolitas rojas; otra de las cajas contiene 10 bolitas rojas y 10 bolitas azules; y en la otra caja hay 10 bolitas azules y 10 bolitas blancas. Emilio, en cada jugada, debe retirar una bolita de alguna de las cajas. Muestra una manera de jugar con la que Emilio pueda obtener con certeza una bolita blanca, como máximo en 13 jugadas.

Aclaración: Emilio puede cambiar de caja luego de una jugada si lo desea.

2. Para cada entero positivo n sea $P(n)$ el producto de los dígitos de n. Por ejemplo, $P(10) = 0$ y $P(216) = 12$. Halla el menor entero positivo m que cumple las siguientes dos condiciones:

- $P(m) - P(m + 2) = 990$,
- m es múltiplo de 11.

Cuarta Fase - Nivel 2

3. a) Prueba que para todo entero positivo par $n \geq 4$, existe un polígono convexo de n lados de tal modo que el número de triángulos isósceles que se pueden formar con 3 de sus vértices es mayor o igual que

$$\frac{(n-2)(3n-4)}{4}.$$

b) Si se pintan de rojo 25 puntos de una circunferencia, de tal forma que cualesquiera dos segmentos que tienen sus extremos en puntos rojos no sean perpendiculares, ¿como máximo, cuántos triángulos isósceles tienen sus vértices en tres puntos rojos?

4. Si x, y, z son números reales tales que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$, determina el menor valor posible y el mayor valor posible de la siguiente expresión

$$2xy + 2yz + 7xz.$$

GRACIAS POR TU PARTICIPACIÓN